SULLO SVILUPPO

DELLE

FUNZIONI FRATTE RAZIONALI

MEMORIA

DI

NICOLA TRUDI

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
Strada Trinità Maggiore n° 26
1866

Memoria estratta dal Vol. II° degli Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche.

I

Nozioni generali.

1. Rappresentando con $\lambda(x)$ o $\mu(x)$ funzioni intere e razionali, ci proponiamo di trovare il termine generale della serie ricorrente in cui si sviluppa la frazione:

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}: \tag{1}$$

serie che può volersi *ascendente* o *discendente*, vale a dire che debba procedere o secondo le potenze crescenti della variabile, o secondo le potenze decrescenti.

Il principio delle serie ricorrenti, o la divisione indefinita possono bastare per calcolare quanti termini si vogliono dello sviluppo; ed, in particolare, dalla divisione risulterà lo sviluppo ascendente o il discendente secondochè il dividendo ed il divisore siano ordinati o entrambi per le potenze crescenti della variabile, o entrambi per le potenze decrescenti. Ma questi mezzi sono insufficienti per la ricerca del termine generale.

2. Noi ammetteremo per semplicità che la data frazione non contenga

parte intera rispetto alla variabile; o, in altri termini, ammetteremo che il grado del numeratore $\lambda(x)$ sia inferiore a quello del denominatore $\mu(x)$. Ciò fa che la serie sia regolare fin dal primo termine, il quale è sempre da tenersi conosciuto *a priori*, perchè in ogni caso *è il quoziente che si ottiene dividendo il primo termine del numeratore pel primo termine del denominatore*. Adunque ritenendo che le due funzioni $\lambda(x)$ e $\mu(x)$, siano le più generali del loro grado, potremo supporre:

$$\lambda(x)=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\ldots+\lambda_{m-1}x^{m-1}$$
$$\mu(x)=\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\ldots+\mu_m\ x^m$$

ed allora il primo termine dello sviluppo ascendente sarà $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$, e lo sviluppo discendente avrà per primo termine $\frac{\lambda_{m-1}}{\mu_m}\cdot\frac{1}{x}$. Inoltre pe'due sviluppi adotteremo le forme seguenti:

(2) $$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}=P_0+P_1x+P_2x^2+\ldots+P_nx^n+\text{ etc: etc:}$$

(3) $$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}=\frac{Q_0}{x}+\frac{Q_1}{x^2}+\frac{Q_2}{x^3}+\ldots+\frac{Q_n}{x^{n+1}}+\text{ etc: etc:}$$

e la quistione che forma il soggetto delle nostre ricerche si riduce a trovare le espressioni de'coefficienti de'due termini generali P_nx^n e $Q_nx^{-(n+1)}$; vale a dire di P_n coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente, e di Q_n coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente. Queste espressioni sono evidentemente funzioni dell'indice n, numero essenzialmente intero e positivo, e converremo di rappresentare sì l'una che l'altra con la notazione comune $F(n)$. Laonde con questo simbolo intendiamo di esprimere di una maniera generale il coefficiente del termine generale dello sviluppo della data frazione, qualunque sia la maniera di sviluppo; ma in particolare converrà ritenere $F(n)=P_n$ ove trattisi dello sviluppo ascendente; ed $F(n)=Q_n$, quando sia quistione dello sviluppo discendente.

3. Del rimanente bisogna osservare che le due maniere di sviluppo possono farsi dipendere l'una dall'altra, ed in modo semplicissimo. Per esempio, ammettendo che sappia trovarsi lo sviluppo discendente di qualunque funzione fratta razionale, basterebbe ciò solo per ottenere lo

sviluppo ascendente della data frazione. In fatti, mutando nella (2) la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividendo i due membri per x, risulta:

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{x}\right)}{x\mu\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{P_0}{x}+\frac{P_1}{x^2}+\frac{P_2}{x^3}+\ldots+\frac{P_n}{x^{n+1}}+\text{ etc:}$$

e quindi si vede che tanto è cercare il coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente della frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, quanto è cercare il coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente della frazione,

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{x}\right)}{x\mu\left(\frac{1}{x}\right)},$$

che si forma dalla prima cangiandovi la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividendola per x. Si conchiuderebbe nello stesso modo che lo sviluppo discendente può farsi dipendere dallo sviluppo ascendente; e per ciò non si ha che a mutare nella (3) la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividere i due membri per x.

Ciò non ostante crediamo che non sia superfluo di considerare direttamente e l'una e l'altra maniera di sviluppo.

4. Un'altra circostanza osservabile si è che lo sviluppo della frazione (1) si può far dipendere da quello della frazione più semplice:

$$\frac{1}{\mu(x)}. \tag{4}$$

Lo sviluppo di questa frazione può certamente riguardarsi come un caso particolare del primo, poichè potrebbe dedursene supponendo che nella funzione $\lambda(x)$ la costante λ_0 si riduca all'unità, e vi si annullino tutte le altre. Ma, inversamente, posto che sia trovato direttamente quello della frazione (4), può subito dedursene quello della frazione (1), non avendosi che a moltiplicarlo per $\lambda(x)$. Siano p_n e q_n i coefficienti di x^n

e di $x^{-(n+1)}$ ne'due sviluppi ascendente e discendente della frazione (4); possiamo supporre che questi sviluppi siano della forma:

$$\frac{1}{\mu(x)} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \ldots. \tag{5}$$

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{q_0}{x} + \frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{x^3} + \ldots + \frac{q_n}{x^{n+1}} + \ldots. \tag{6}$$

Moltiplicandoli per $\lambda(x)$, i due prodotti debbono riprodurre gli analoghi sviluppi della frazione (1); e ne risulta:

$$P_n = \lambda_0 p_n + \lambda_1 p_{n-1} + \lambda_2 p_{n-2} + \ldots + \lambda_{m-1} p_{n-m+1} \tag{7}$$

$$Q_n = \lambda_0 q_n + \lambda_1 q_{n+1} + \lambda_2 q_{n+2} + \ldots + \lambda_{m-1} q_{n+m-1}\,. \tag{8}$$

Ecco adunque come i valori di P_n e Q_n dipendono di una maniera semplicissima da quelli p_n e q_n; il che ha molto interesse pel calcolo numerico, imperciocchè la ricerca degli ultimi è, come vedremo, generalmente assai più semplice di quella de' primi.

5. Bisogna intanto riflettere che nello sviluppo discendente della frazione (4), rappresentato dalla formola (6), sono necessariamente nulli i primi $m-1$ termini, perchè questo sviluppo deve nel fatto cominciare col termine che ha per divisore x^m (n° 2). Ora ciò vuol dire che la funzione q_n è nulla per tutti gli $m-1$ valori dell'indice n da o ad $m-2$; di modo cho si ha $q_0 = q_1 = \ldots q_{m-2} = 0$; e lo sviluppo si riduce ad:

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{q_{m-1}}{x^m} + \frac{q_m}{x^{m+1}} + \frac{q_{m+1}}{x^{m+2}} + \ldots + \frac{q_n}{x^{n+1}} + \ldots$$

Siffatte circostanze non hanno più luogo nello sviluppo ascendente della (4), ma si riproducono evidentemente in quello della frazione

$$\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}\,. \tag{9}$$

Distinguendo con p'_n il coefficiente di x^n in questo sviluppo, si ha

$$p'_0 = p'_1 = p'_2 = \ldots = p'_{m-2} = 0\,,$$

e sarà quindi:

$$\frac{x^{m-1}}{\mu(x)} = p'_{m-1} x^{m-1} + p'_m x^m + p'_{m+1} x^{m+1} + \ldots + p'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \ldots$$

Sopprimendo da'due membri il fattore x^{m-1} si ottiene:

$$\frac{1}{\mu(x)}=p'_{m-1}+p'_m x+p'_{m+1}x^2+\ldots+p'_{n+m-1}x^n+\ldots$$

e poichè il secondo membro deve coincidere col secondo membro della formola (5), si avrà

$$p_n=p'_{n+m-1}\,.$$

Segue da ciò che per ottenere l'espressione di p_n, coefficiente della potenza x^n nello sviluppo ascendente della frazione $\frac{1}{\mu(x)}$, si può cercare l'espressione di p'_n, coefficiente della stessa potenza nello sviluppo somigliante della frazione $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$, e mutarvi la n in $n+m-1$.

Avvertimento

6. Nel corso di queste ricerche occorrendo di rappresentare la derivata di un'ordine qualunque di una funzione $f(x)$, ci varremo di qualsivoglia delle notazioni ricevute, ma useremo quella degli accenti in un senso alquanto diverso dall'ordinario, riserbandola esclusivamente a dinotare egualmente la derivata, però divisa pel prodotto de' numeri naturali da 1 fino all'ordine della derivazione. Adunque scrivendo $f^{(r)}(x)$, intendiamo il quoziente che risulta dal dividere la derivata r^{ma} di $f(x)$ pel prodotto $1.2.3\ldots r$; di modo che si avrà generalmente:

$$f^{(r)}(x)=\frac{D^r f(x)}{1.2.3\ldots r}\,;$$

quindi in particolare:

$$f'(x)=\frac{Df(x)}{1}\,,\quad f''(x)=\frac{D^2f(x)}{1.2}\,,\quad f'''(x)=\frac{D^3f(x)}{1.2.3}\,,\quad \text{etc:}$$

e la formola di Taylor diverrà in conseguenza:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)+h^3f'''(x)+\ \text{etc: etc:}$$

Inoltre adotteremo il simbolo $(\alpha)_i$ per indicare il coefficiente binomiale di rango $i+1$ relativo all'esponente α; talchè sarà in generale:

$$(\alpha)_i=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)}{1.2\ldots i}$$

e conseguentemente

$$(\alpha)_0=1\,,\quad (\alpha)_1=\alpha\,,\quad (\alpha)_2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\,,\ \text{etc: etc:}$$

II

Formole e teoremi fondamentali.

7. Siano $a, b, c, \ldots$ le radici distinte dell'equazione $\mu(x)=0$, ed $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i loro gradi rispettivi di moltiplicità; decomponendo la data frazione (1) in frazioni parziali, potremo supporre:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(x)}{\mu(x)} = & \frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ & + \frac{B_0}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ & + \frac{C_0}{(x-c)^{\gamma}} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_{\gamma-1}}{x-c} \\ & + \text{ etc: } \qquad \text{etc: } \qquad \text{etc:}\end{aligned}$$

e le costanti A_i, B_i saranno definite dalle formole:

$$(8) \quad A_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i} D^i \frac{\lambda(a)}{\mu^{(\alpha)}(a)}, \quad B_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i} D^i \frac{\lambda(b)}{\mu^{(\beta)}(b)}, \text{ etc: etc:}$$

Posto ciò, siccome lo sviluppo della frazione proposta equivale alla somma degli sviluppi analoghi di tutte le frazioni parziali, ne segue che i valori di P_n e Q_n sono uguali il primo alla somma de' coefficienti di x^n ne' loro sviluppi ascendenti, ed il secondo alla somma de' coefficienti di $x^{-(n+1)}$ ne' loro sviluppi discondenti. Ora converremo di indicare con $P_{n.a}$ la somma de' coefficienti di x^n negli sviluppi ascendenti delle sole α frazioni dovute alla radice a; con $P_{n.b}$ la somma analoga per le β frazioni dovute alla radice b; e così per le altre. In questo modo $P_{n.a}$, $P_{n.b}$, $P_{n.c}$, etc: dinoteranno le parti di P_n provvenienti rispettivamente dalle radici a, b, c, etc:, parti che diremo *elementi* di P_n, e si avrà:

$$P_n = P_{n.a} + P_{n.b} + P_{n.c} + \text{ etc: etc:}$$

Uniformemente scrivendo $Q_{n.a}$, $Q_{n.b}$, $Q_{n.c}$, etc: per rappresentare gli elementi di Q_n dovuti alle radici a, b, c, etc:, avremo:

$$Q_n = Q_{n.a} + Q_{n.b} + Q_{n.c} + \text{ etc: etc:}$$

Pertanto è chiaro che la ricerca di P_n e Q_n va ridotta a quella de' loro ele-

menti; ed a tale oggetto provveggono le formole ed i teoremi che passiamo ad esporre.

8. Ed in primo luogo considereremo gli elementi di Q_n, perchè manifestano caratteri alquanto più semplici. Ora l'elemento $Q_{n,a}$ rappresenta, per ipotesi, la somma de' coefficienti di $x^{-(n+1)}$ negli sviluppi discendenti di tutte le α frazioni dovute alla radice a; da un'altra parte essendo in generale:

$$\frac{A_{\alpha-r}}{(x-a)^r}=(x-a)^{-r}A_{\alpha-r},$$

vediamo che nello sviluppo discendente di questa frazione la potenza $x^{-(n+1)}$ ha per coefficiente:

$$\frac{r(r+1)(r+2)\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots(n-r+1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r};$$

ma il fattore frazionario, scrivendo il numeratore in ordino inverso diviene

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)\ldots(r+1)r}{1.2\ldots(r-1)r\ldots(n-r)(n-r+1)}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}$$

dunque l'espressione del detto coefficiente si riduce ad:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r}.$$

Questa espressione, ponendovi $r=1,2,3,\ldots,\alpha$, dà i coefficienti di $x^{-(n+1)}$ negli sviluppi discendenti di tutte le frazioni provvenienti dalla radice a; e perciò l'elemento $Q_{n,a}$ sarà definito dalla formola:

$$Q_{n,a}=\sum_{1}^{\alpha}{}_r\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r}, \tag{9}$$

la quale, mutatis mutandis, vale anche ad esprimere gli altri elementi $Q_{n,b}$, $Q_{n,c}$, etc.; ed intanto possiamo rappresentare il valore di Q_n scrivendo

$$Q_n=\Sigma\sum_{1}^{\alpha}{}_r\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r},$$

a patto che la novella somma sia estesa a tutte le radici distinte dell'equazione $\mu(x)=0$.

9. Con un metodo presso a poco identico si possono determinare gli

elementi di P_n, e quindi la stessa P_n. In fatti l'elemento $P_{n,a}$ risulta dalla somma de' coefficienti di x^n negli sviluppi ascendenti di tutte le α frazioni dovute alla radice a. Ora essendo:

$$\frac{A_{\alpha-r}}{(x-a)^r}=(-1)^r\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-r}\frac{A_{\alpha-r}}{a^r},$$

è manifesto che nello sviluppo di questa frazione la potenza x^n ha per coefficiente:

$$(-1)^r\frac{r(r+1)\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(r+n-1)}{1.2\ldots(r-1)r(r+1)\ldots n}\,\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n+r}},$$

che si riduce a:

$$(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}\,\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n+r}};$$

ed in conseguenza, come nel caso precedente, si hanno le due formole:

$$P_{n,a}=\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}\,\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n+r}}, \tag{10}$$

$$P_n=\Sigma\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}\,\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n+r}},$$

nell'ultima delle quali la seconda somma deve, come prima, estendersi a tutte le radici distinte dell'equazione $\mu(x)=0$.

10. Le espressioni di $Q_{n,a}$ e $P_{n,a}$ sono suscettibili di una interessante trasformazione. Siccome la funzione $\mu(x)$ è divisibile per $(x-a)^\alpha$, dinotato il quoziente con $\theta(x)$, sarà:

$$\mu(x)=(x-a)^\alpha\theta(x);$$

quindi $\mu^{(\alpha)}(a)=\theta(a)$; e per le formole (8) si avrà:

$$A_{\alpha-r}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-r)}D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)}{1.2\ldots(\alpha-1)}D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)};$$

in conseguenza di che le espressioni di $Q_{n,a}$ e $P_{n,a}$ divengono:

$$Q_{n,a}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}\sum_1^{\alpha}{}_r(\alpha-1)_{r-1}\left(n(n-1)\ldots(n-r+2)a^{n-r+1}\right)\left(D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}\right)$$

$$P_{n,a}=\frac{-1}{1.2\ldots(\alpha-1)}\sum_1^{\alpha}{}_r(\alpha-1)_{r-1}\left((-1)^{r-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{a^{n+r}}\right)\left(D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}\right)$$

Esaminando i tre fattori che in ciascuna sono messi in evidenza sotto il

segno Σ, si vedrà che nell'una e nell'altra il primo fattore è il coefficiente binomiale di rango r relativo all'esponente $\alpha-1$, ed il terzo è la derivata dell'ordine $\alpha-r$ di $\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}$. In quanto al secondo fattore è chiaro che nella prima esso è la derivata dell'ordine $r-1$ di a^n, mentre nella seconda è la derivata dell'ordine istesso di $\frac{1}{a^{n+1}}$. Dunque, per un teorema conosciuto, le due sommatorie equivalgono rispettivamente alle derivate dell'ordine $\alpha-1$ de' due prodotti $\frac{\lambda(a)}{\theta(a)} \times a^n$, o $\frac{\lambda(a)}{\theta(a)} \times \frac{1}{a^{n+1}}$; e perciò le due formole precedenti si traducono nelle altre più semplici:

$$Q_{n,\alpha} = \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)} D^{\alpha-1} \frac{\lambda(a)}{\theta(a)} a^n \quad , \tag{11}$$

$$P_{n,\alpha} = \frac{-1}{1.2\ldots(\alpha-1)} D^{\alpha-1} \frac{\lambda(a)}{\theta(a)} a^{-(n+1)}. \tag{12}$$

11. Queste ultime formole conducono ad osservabili conseguenze. Considerando la prima, porremo:

$$f(a) = \frac{\lambda(a)}{\theta(a)} a^n, \tag{13}$$

e si avrà:

$$Q_{n,\alpha} = \frac{D^{\alpha-1} f(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)},$$

o, più semplicemente (n° 6)

$$Q_{n,\alpha} = f^{(\alpha-1)}(a). \tag{14}$$

Ciò premesso, dinotata con t una variabile, la (13) potrà mutarsi in:

$$f(a+t) = \frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)} (a+t)^n; \tag{15}$$

e siccome:

$$f(a+t) = f(a) + tf'(a) + t^2 f''(a) + \ldots + t^{\alpha-1} f^{(\alpha-1)}(a) + \ldots$$

risulta che il valore di $Q_{n,\alpha}$ coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo in potenze ascendenti di t di $f(a+t)$, o meglio del secondo membro della (15).

Se poi si considera la formola (12), posto:

$$f(a)=\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^{-(n+1)},$$

si avrebbe:

$$P_{n,a}=-f^{(\alpha-1)}(a),$$

ed inoltre:

$$f(a+t)=\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}; \tag{16}$$

e quindi si conchiuderebbe, come poc'anzi, che il valore di $P_{n,a}$ coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo ascendente del secondo membro della (16).

Adunque, riassumendo queste conchiusioni, possiamo enunciare il seguente teorema:

Data la frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, *sia* $(x-a)^\alpha$ *un fattore multiplo di* $\mu(x)$, *e* $\theta(x)$ *il fattore complementare. Posto ciò, l'elemento di* Q_n *dovuto al primo fattore, ossia la parte che esso attribuisce al coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *nello sviluppo discendente della data frazione, sarà uguale al coefficiente di* $t^{\alpha-1}$ *nello sviluppo ascendente della funzione:*

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^n.$$

E l'elemento di P_n *dovuto al detto fattore, o la parte che attribuisce al coefficiente di* x^n *nello sviluppo ascendente della medesima frazione, preso col segno contrario, sarà ancora uguale al coefficiente di* $t^{\alpha-1}$ *nello sviluppo ascendente della funzione:*

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}.$$

12. Questo teorema si può tradurre in formole scrivendo:

$$Q_{n,a}=\quad \text{coeff. } t^{\alpha-1} \text{ in } \frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^n \quad ,$$

$$P_{n,a}=-\text{coeff. } t^{\alpha-1} \text{ in } \frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)};$$

a patto che le funzioni che figurano ne' secondi membri s'intendano svi-

luppate secondo le potenze crescenti di t. Intanto in rapporto a questi sviluppi dobbiamo osservare che non è già che faccia d' uopo di trovare i loro termini generali, ma solo i loro primi α termini, ch'è sempre agevole di calcolare direttamente co' mezzi ordinarii di moltiplicazione e divisione. Questo calcolo si può regolare in varii modi; per esempio si può moltiplicare lo sviluppo della funzione $\lambda(a+t)$ per lo sviluppo dell'una o dell'altra potenza $(a+t)^n$, $(a+t)^{-(n+1)}$, e dividere il prodotto per lo sviluppo della funzione $\theta(a+t)$; oppure si può sviluppare il quoziente $\frac{1}{\theta(a+t)}$ e moltiplicarlo per quel prodotto; od ancora si può dividere $\lambda(a+t)$ per $\theta(a+t)$, e moltiplicare il quoziente per la detta potenza, la quale nel calcolo numerico va sempre meglio impiegata in ultimo luogo, a causa dell'esponente n, che vuol tenersi indeterminato.

Però, comunque si operi, siccome il punto objettivo del calcolo è il coefficiente di $t^{\alpha-1}$, si terrà presente che tanto gli sviluppi parziali delle funzioni $\lambda(a+t)$, $\theta(a+t)$, $(a+t)^n$, $(a+t)^{-(n+1)}$, quanto lo sviluppo di un loro prodotto o quoziente, può limitarsi ai primi α termini, e quindi arrestarsi al termine in $t^{\alpha-1}$, riuscendo inutili i termini di grado superiore. In conseguenza, adottando pe' coefficienti binomiali la notazione già convenuta (n° 6), sarà lecito di scrivere

$$Q_{n,\alpha} = \text{coef. } t^{\alpha-1} \text{ in}$$

$$\frac{\lambda(a)+t\lambda'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\lambda^{(\alpha-1)}(a)}{\theta(a)+t\theta'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\theta^{(\alpha-1)}(a)}\left[a^{\alpha-1}+(n)_1 a^{\alpha-2}t+\ldots+(n)_{\alpha-1}a^0t^{\alpha-1}\right]a^{n-\alpha+1}$$

$$P_{n,\alpha} = -\text{coef. } t^{\alpha-1} \text{ in}$$

$$\frac{\lambda(a)+t\lambda'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\lambda^{(\alpha-1)}(a)}{\theta(a)+t\theta'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\theta^{(\alpha-1)}(a)}\left[a^{\alpha-1}+(-n-1)_1 a^{\alpha-2}t+\ldots+(-n-1)_{\alpha-1}a^0t^{\alpha-1}\right]a^{-(n+\alpha)}$$

13. In particolare, se $\alpha=1$, vale a dire se a è radice semplice, in ciascuno de' polinomii che figurano in queste formole non dovrà ritenersi che il solo primo termine; e perciò si ha in tal caso:

$$Q_{n,a} = \frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^n \quad , \quad P_{n,a} = -\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^{-(n+1)}$$

ovvero, tenendo presente che $\theta(a)=\mu'(a)$ (n° 10):

$$Q_{n,a} = \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}a^n \quad , \quad P_{n,a} = -\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}$$

14. Il teorema del n° 11 si può rendere più esplicito introducendo in

luogo della funzione θ la stessa funziono iniziale μ. Essendo a radice multipla di grado α dell'equazione $\mu(x)=0$, per $x=a$ si ha

$$\mu(a)=\mu'(a)=\mu''(a)=\ldots=\mu^{(\alpha-1)}(a)=0\ ,$$

e perciò:

$$\mu(a+t)=t^{\alpha}[\mu^{(\alpha)}(a)+t\mu^{(\alpha+1)}(a)+t^{2}\mu^{(\alpha+2)}(a)+\ldots]$$

Inoltre, siccome $\mu(x)=(x-a)^{\alpha}\theta(x)$, posto $x=a+t$, risulta:

$$\mu(a+t)=t^{\alpha}\theta(a+t)\ ;$$

e ne seguo che i polinomii $\mu(a+t)$ e $\theta(a+t)$ non differiscono che pel fattore t^{α}, comune a' termini del primo; di modo che si avrà identicamonte:

$$\mu^{(\alpha)}(a)+t\mu^{(\alpha+1)}(a)+t^{2}\mu^{(\alpha+2)}(a)+\ldots=\theta(a)+t\theta'(a)+t^{2}\theta''(a)+\ldots$$

e quindi:

$$\mu^{(\alpha)}(a)=\theta(a)\ ,\ \mu^{(\alpha+1)}(a)=\theta'(a)\ ,\ \mu^{(\alpha+2)}(a)=\theta''(a)\ ,\ \ldots\ ,\ \mu^{(\alpha+i)}(a)=\theta^{(i)}(a)\ ,\ \ldots$$

È chiaro dopo ciò che gli sviluppi delle due funzioni:

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^{n}$$

hanno i medesimi coefficienti; però, mentre il primo ha solo potenze positive di t, nel secondo i primi α termini sono affetti dalle potenze $\frac{1}{t^{\alpha}}, \frac{1}{t^{\alpha-1}}, \ldots, \frac{1}{t}$; di guisa che il termine di rango α, che nel primo è moltiplicato per $t^{\alpha-1}$, nel secondo lo è per $\frac{1}{t}$. Altrettanto avviene negli sviluppi delle due funzioni:

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}\ ;$$

ed in conseguenza il teorema del n° 11 si modifica come segue:

Data la frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, *sia* $(x-a)^{\alpha}$ *un fattore di* $\mu(x)$. *Posto ciò, considerando i due sviluppi discendente ed ascendente della frazione proposta, la parte attribuita da quel fattore al coefficiente di* $x^{-(n+1)}$, *e quella attri-*

buita al coefficiente di x^n, *presa col segno contrario, sono rispettivamente uguali al coefficiente di* $\frac{1}{t}$ *negli sviluppi ascendenti delle due funzioni:*

$$\frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^n \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}.$$

15. Il teorema così presentato palesa subito una proprietà, che è di molto interesse nelle attuali ricerche. Siano a e b due distinte radici dell'equazione $\mu(x)=o$, e $Q_{n,a}$ e $Q_{n,b}$ i corrispondenti elementi di Q_1; sarà:

$$Q_{n,a}=\text{coef.}\frac{1}{t}\text{ in }\frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^n \quad , \quad Q_{n,b}=\text{coef.}\frac{1}{t}\text{ in }\frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(b+t)^n$$

Ora, posto che α e β siano i gradi di moltiplicità delle due radici, si ha

$$\mu(a+t)=t^\alpha\left\{\mu^{(\alpha)}(a)+f\mu^{(\alpha-1)}(a)+\ldots\right\} \quad , \quad \mu(b+t)=t^\beta\left\{\mu^{(\beta)}(b)+t\mu^{(\beta-1)}(b)+\ldots\right\} ;$$

e quindi si vede che le espressioni di $Q_{n,a}$ e $Q_{n,b}$ sono, in generale, funzioni dissimili delle radici a e b; ma la cosa muta di aspetto se sono uguali i loro gradi di moltiplicità; vale a dire se $\alpha=\beta$. Allora in fatti abbiamo:

$$\mu(b+t)=t^\alpha\left\{\mu^{(\alpha)}(b)+t\mu^{(\alpha-1)}(b)+\ldots\right\} ;$$

ed è manifesto che in tal caso le espressioni di $Q_{n,a}$ e $Q_{n,b}$ si mutano l'una nell'altra mutando a in b; o viceversa. È poi ben chiaro che ha luogo la stessa proprietà a riguardo delle espressioni di $P_{n,a}$ e $P_{n,b}$; e quindi risulta il teorema che segue:

Nello sviluppo discendente o ascendente della frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ *le parti del coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *o di* x^n, *dovute a due distinte radici dell'equazione* $\mu(x)=0$, *sono funzioni simili delle stesse radici, quando sono uguali i loro gradi di moltiplicità.*

16. Si è già osservato che i valori di $Q_{n,a}$ e $P_{n,a}$ si possono ottenere dividendo $\lambda(a+t)$ per $\theta(a+t)$, e cercando il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nel prodotto del quoziente per la potenza $(a+t)^n$ o per l'altra $(a+t)^{-(n+1)}$. Ora è noto che i coefficienti de' primi α termini di quel quoziente equivalgono ai numeratori delle α frazioni parziali di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, dovute al fattore $(x-a)^\alpha$ di $\mu(x)$, vale a dire alle quantità designate con $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$; e quindi

risulta il seguente teorema, che porge ad un tempo lo sviluppo in serie della data frazione, e la sua decomposizione in frazioni parziali.

Data la frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, *sia* $(x-a)^\alpha$ *un fattore di* $\mu(x)$, *e* $\theta(x)$ *il fattore complementare. Dividendo* $\lambda(a+t)$ *per* $\theta(a+t)$ *i coefficienti de'primi* α *termini del quoziente saranno per ordine i numeratori delle* α *frazioni parziali della data frazione, aventi per denominatori le potenze decrescenti* $(x-a)^\alpha$, $(x-a)^{\alpha-1}, \ldots, x-a$.

Inoltre, se il quoziente si moltiplica per la potenza $(a+t)^n$ *o* $(a+t)^{-(n+1)}$, *il coefficiente di* $t^{\alpha-1}$ *esprimerà la parte attribuita dal fattore* $(x-a)^\alpha$ *al coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *nello sviluppo discendente della frazione proposta*, o *a quello di* x^n *nel suo sviluppo ascendente.*

Adunque, secondo questo teorema, il valore di $Q_{n,\alpha}$ sarà il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo del prodotto:

$$[A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_{\alpha-1}t^{\alpha-1}] \times$$
$$\times [a^{\alpha-1}+(n)_1a^{\alpha-2}t+(n)_2a^{\alpha-3}t^2+\ldots+(n)_{\alpha-1}t^{\alpha-1}]a^{n-\alpha+1}$$

ed il valore di $P_{n,\alpha}$ sarà pure il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo dell'altro prodotto:

$$[A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_{\alpha-1}t^{\alpha-1}] \times$$
$$\times [a^{\alpha-1}+(-n-1)_1a^{\alpha-2}t+(-n-1)_2a^{\alpha-3}t^2+\ldots+(-n-1)_{\alpha-1}t^{\alpha-1}]a^{-(n+\alpha)},$$

e si ha in conseguenza

$$(17) \quad Q_{n,\alpha}= [(n)_{\alpha-1}A_0+(n)_{\alpha-2}A_1a+(n)_{\alpha-3}A_2a^2+\ldots+(n)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}]a^{n-\alpha+1},$$

$$(18) \quad P_{n,\alpha}=-[(-n-1)_{\alpha-1}A_0+(-n-1)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(-n-1)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}]a^{-(n+\alpha)}.$$

Egli è facilo a riconoseere cho queste espressioni di $Q_{n,\alpha}$ o $P_{n,\alpha}$ coincidono con quello che risultano rispettivamente dalle formole (9) e (10); ma esse acquistano maggiore importanza pel significato che ricevono dal teorema attuale.

III

Osservazioni sul calcolo delle costanti che entrano nelle formole precedenti.

17. Per le applicazioni delle formole fin qui stabilite crediamo di aggiungere alcune osservazioni relative al calcolo delle costanti A_0, $A_1, \ldots A_{\alpha-1}$. Si è già detto che i valori di queste quantità equivalgono a' coefficienti de' primi α termini del quoziente $\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}$, talchè si ha.

$$\frac{\lambda+\lambda' t+\lambda'' t^2+\ldots+\lambda^{(\alpha-1)} t^{\alpha-1}\ldots}{\theta+\theta' t+\theta'' t^2+\ldots+\theta^{(\alpha-1)} t^{\alpha-1}\ldots}=A_0+A_1 t+A_2 t^2+\ldots+A_{\alpha-1} t^{\alpha-1}+\ldots$$

avendo per semplicità soppresso la lettera a sotto le caratteristiche di funzioni λ e θ. Ma quindi si ottengono le α equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
\lambda \quad &= A_0\theta \\
\lambda' \quad &= A_0\theta' \quad + A_1\theta \\
\lambda'' \quad &= A_0\theta'' \quad + A_1\theta' \quad + A_2\theta \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\lambda^{(\alpha-1)} &= A_0\theta^{(\alpha-1)}+A_1\theta^{(\alpha-2)}+A_2\theta^{(\alpha-3)}+\ldots+A_{\alpha-1}\theta
\end{aligned}$$

le quali danno facilmente l'uno dopo l'altro i valori delle α costanti.

Intanto il valore di una costante qualunque si può esprimere immediatamente con una formola convenientissima al calcolo numerico. In fatti, risolvendo le equazioni per determinanti, si ha dapprima:

$$A_r=\begin{vmatrix}
\theta & 0 & 0 & . & 0 & \lambda \\
\theta' & \theta & 0 & . & 0 & \lambda' \\
\theta'' & \theta' & \theta & . & 0 & \lambda'' \\
. & & & . & & \\
\theta^{(r-1)} & \theta^{(r-2)} & \theta^{(r-3)} & . & \theta & \lambda^{(r-1)} \\
\theta^{(r)} & \theta^{(r-1)} & \theta^{(r-2)} & . & \theta' & \lambda^{(r)}
\end{vmatrix};$$

ma, se si ponga:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \theta' & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ \theta'' & \theta' & 0 & . & 0 & 0 \\ \theta''' & \theta'' & \theta' & . & 0 & 0 \\ . & & & . & . & . \\ \theta^{(i-1)} & \theta^{(i-2)} & \theta^{(i-3)} & . & \theta' & 0 \\ \theta^{(i)} & \theta^{(i-1)} & \theta^{(i-2)} & . & \theta'' & \theta' \end{vmatrix},$$

e si sviluppi il primo determinante secondo gli elementi dell' ultima verticale, si avrà evidentemente:

$$(19) \qquad A_r = \lambda^{(r)} \frac{\Delta_0}{\theta} - \lambda^{(r-1)} \frac{\Delta_1}{\theta^2} + \lambda^{(r-2)} \frac{\Delta_2}{\theta^3} - \ldots + (-1)^r \lambda \frac{\Delta_r}{\theta^{r+1}} .$$

Questa formola, nella quale si ha $\Delta_0 = 1$, porge i valori di tutte le costanti ponendovi successivamente $r=0, 1, 2$, etc; e si ottiene in tal guisa:

$$A_0 = \lambda \frac{\Delta_0}{\theta}$$

$$A_1 = \lambda' \frac{\Delta_0}{\theta} - \lambda \frac{\Delta_1}{\theta^2}$$

$$A_2 = \lambda'' \frac{\Delta_0}{\theta} - \lambda' \frac{\Delta_1}{\theta^2} + \lambda \frac{\Delta_2}{\theta^3}$$

etc: etc: etc:

Bisogna inoltre osservare che i determinanti i quali entrano in queste formole, attesa la loro forma speciale, possono essere rapidamente calcolati, ed in diverse maniere. Ma nella pratica giova far dipendere questi calcoli dalla formola seguente:

$$\Delta_i = \theta'\Delta_{i-1} - \theta\theta''\Delta_{i-2} + \theta^2\theta'''\Delta_{i-3} - \theta^3\theta''''\Delta_{i-4} + \ldots + (-1)^{i-1}\theta^{i-1}\theta^{(i)}\Delta_0 ;$$

formola cui subito si perviene sviluppando il determinante Δ_i secondo

gli elementi della prima verticale. Ponendovi $i=1, 2, 3$, etc: risultano le formole

$$\Delta_1=\theta'$$
$$\Delta_2=\theta'\Delta_1-\theta\theta''$$
$$\Delta_3=\theta'\Delta_2-\theta\theta''\Delta_1+\theta^2\theta'''$$
$$\Delta_4=\theta'\Delta_3-\theta\theta''\Delta_2+\theta^2\theta'''\Delta_1-\theta^3\theta''''$$
$$\Delta_5=\theta'\Delta_4-\theta\theta''\Delta_3+\theta^2\theta'''\Delta_2-\theta^3\theta''''\Delta_1+\theta^4\theta^{V}$$

etc: etc: etc:

le quali definiscono con molta semplicità l'uno dopo l'altro i valori di tutte le quantità Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc.; e si avrebbe ancora esplicitamente:

$$\Delta_1=\theta'$$
$$\Delta_2=\theta'^2-\theta\theta''$$
$$\Delta_3=\theta'^3-2\theta\theta'\theta''+\theta^2\theta'''$$
$$\Delta_4=\theta'^4-3\theta\theta'^2\theta''+\theta^2(2\theta'\theta'''+\theta''^2)-\theta^3\theta^{IV}$$
$$\Delta_5=\theta'^5-4\theta\theta'^3\theta''+3\theta^2(\theta'^2\theta'''+\theta'\theta''^2)-2\theta^3(\theta'\theta''''+\theta''\theta''')+\theta^4\theta^{V}$$

etc: etc: etc: etc:

ma pel calcolo numerico sono da preferirsi le formole che precedono.

18. È stato osservato che lo sviluppo della frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ può in ogni caso farsi dipendere da quello della frazione $\frac{1}{\mu(x)}$. Ora per le frazioni di questa forma le espressioni delle costanti A_r divengono semplicissime. Allora, infatti, essendo $\lambda(x)=1$, si ha $\lambda=1$, $\lambda'=0$, $\lambda''=0$, etc:; quindi la formola generale (19) si riduce ad:

$$A_r=(-1)^r\frac{\Delta_r}{\theta^{r+1}}$$

e ne risulta:

$$A_0=\frac{1}{\theta}\,,\ A_1=-\frac{\Delta_1}{\theta^2}\,,\ A_2=\frac{\Delta_2}{\theta^3}\,,\ A_3=-\frac{\Delta_3}{\theta^4}\,,\ \ldots,\ A_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{\Delta_{n-1}}{\theta^n}$$

La semplicità di queste formole conferma la convenienza di far dipendere nelle applicazioni lo sviluppo di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ da quello di $\frac{1}{\mu(x)}$; ed in-

tanto in rapporto all'ultima frazione le espressioni di Q_n e P_n saranno definite da:

$$(20)\qquad Q_{n,\alpha}=\left[(n)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(n)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right]a^{n-\alpha+1},$$

$$(21)\qquad P_{n,\alpha}=-\left[(-n-1)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(-n-1)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right]a^{-(n+\alpha)}.$$

19. Ne'casi più comuni, come sono quelli di $\alpha=1, 2, 3$, etc, queste formole si trsducono nelle seguenti:

$$\alpha=1\begin{cases}Q_{n,\alpha}=(n)_0\frac{\Delta_0}{\theta}a^n=\frac{1}{\theta}a^n=\frac{1}{\mu'}a^n\\ P_{n,\alpha}=-(-n-1)_0\frac{\Delta_0}{\theta}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{\theta}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{\mu'}a^{-(n+1)}\end{cases}$$

$$\alpha=2\begin{cases}Q_{n,\alpha}=\left[(n)_1\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_0\frac{\Delta_1}{\theta^2}a\right]a^{n-1}=\left[\frac{n}{\theta}-\frac{\theta'}{\theta^2}a\right]a^{n-1}\\ P_{n,\alpha}=-\left[(-n-1)_1\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_0\frac{\Delta_1}{\theta^2}a\right]a^{-(n+2)}=\left[\frac{n+1}{\theta}+\frac{\theta'}{\theta^2}a\right]a^{-(n+2)}\end{cases}$$

$$\alpha=3\begin{cases}Q_{n,\alpha}=\left[(n)_2\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_1\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+(n)_0\frac{\Delta_2}{\theta^3}a^2\right]a^{n-2}\\ \qquad=\left[\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{\theta}-n\frac{\theta'}{\theta^2}a+\frac{\theta'^2-\theta\theta''}{\theta^3}a^2\right]a^{n-2}\\ P_{n,\alpha}=-\left[(-n-1)_2\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_1\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+(-n-1)_0\frac{\Delta_2}{\theta^3}a^2\right]a^{-(n+3)}\\ \qquad=-\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{1}{\theta}+(n+1)\frac{\theta'}{\theta^2}a+\frac{\theta'^2-\theta\theta''}{\theta^3}a^2\right]a^{-(n+3)}\end{cases}$$

E così di seguito.

20. Aggiungeremo ora alcune osservazioni riguardo al calcolo delle quantità figurate da θ, θ', θ'', etc:, le quali esprimono i valori che prendono per $x=a$ la funzione $\theta(x)$ e le sue successive derivate, divise per 1, 1.2, $1.2.3$, etc:, ed equivalgono ai coefficienti dello sviluppo di

$\theta(a+t)$; $\theta(x)$ dinotando inoltre il quoziente della funzione $\mu(x)$ divisa pel suo fattore multiplo $(x-a)^\alpha$, di modo che:

$$\mu(x)=(x-a)^\alpha\theta(x) .$$

Questa formola, mutando la x in $a+t$ diviene:

$$\mu(a+t)=t^\alpha\theta(a+t) ,$$

e dimostra che gli sviluppi delle due funzioni $\mu(a+t)$ e $\theta(a+t)$ hanno i medesimi coefficienti, fatta astrazione nel primo da' primi α termini, che sono nulli (n° 14). Adunque, per avere questi coefficienti, è indifferente che si sviluppi l'una o l'altra funzione; ma avuto riguardo alla semplicità del calcolo, sarà da preferire il primo sviluppo, se il fattore $(x-a)^\alpha$ si trovi implicito nella funzione $\mu(x)$; e converrà preferire il secondo, se questa funzione si abbia nella forma $(x-a)^\alpha\,\theta(x)$.

21. In diverse applicazioni la funzione $\mu(x)$ è data come un prodotto di più fattori. In questi casi sarebbe scegliere una cattiva via se si cominciasse dallo effettuare il prodotto; ma invece bisogna, in generale, prima sviluppare i fattori secondo le potenze crescenti di t, mutando in ciascuno la x in $a+t$, e poscia moltiplicarli tra loro; non perdendo di vista che qualunque sviluppo vuol'essere limitato al termine in $t^{\alpha-1}$, supposto già separato il fattore t^α. Un esempio servirà meglio a dichiarare il procedimento per tutti i casi.

Supponiamo:

$$\mu(x)=(x-1)(x^3-1)(x^5-1)(x^6-1) .$$

In questo esempio può subito porsi in evidenza la natura delle radici dell'equazione $\mu(x)=0$, perchè la funzione si trasforma evidentemente in:

$$\mu(x)=(x-1)^4(x^2+x+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^3+1) ;$$

e ne segue che l'equazione ha una radice quadrupla razionale uguale ad 1; ed inoltre due radici doppie, che sono quelle dell'equazione $x^2+x+1=0$; e sette radici semplici, quattro appartenenti all' equazione $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, e tre all'altra $x^3+1=0$, una delle quali è ancora razionale ed uguale a -1.

Considerando dapprima la radice quadrupla 1, essendo $\alpha=4$, sarà:

$$\mu(1+t)=t^4\theta(1+t) ;$$

e trattasi di calcolare i valori delle quattro quantità θ, θ', θ'', θ''', e per-

ciò i soli primi quattro termini dello sviluppo di $\theta(1+t)$. Ora, cambiando immediatamente la x in $1+t$ nella forma originaria della data funzione, si ha:

$$\mu(1+t)=[(1+t)-1][(1+t)^3-1][(1+t)^5-1][(1+t)^6-1] ;$$

ma sviluppando i fattori, ciascuno diverrà divisibile per t; e però separando questo divisore, e limitando gli sviluppi a' termini in t^3, verrà:

$$\mu(1+t)=t^4[(3+3t+t^2)(5+10t+10t^2+5t^3)(6+15t+20t^2+15t^3)+\ldots.] .$$

e sarà in conseguenza:

$$\theta(1+t)=5(3+3t+t^2)(1+2t+2t^2+t^3)(6+15t+20t^2+15t^3)+\ldots.$$

In fine, sviluppando il prodotto, senza mai tener conto de' termini di grado superiore al terzo, si ottiene con calcolo semplicissimo:

$$\theta(1+t)=5[18+99t+273t^2+286t^3+\ldots.] ;$$

e quindi in rapporto alla radice quadrupla 1 risulta:

$$\theta=5.18 \quad , \quad \theta'=5.99 \quad , \quad \theta''=5.273 \quad , \quad \theta'''=5.486 .$$

Passando a considerare le radici doppie, vale a dire le radici dell'equazione $x^2+x+1=0$, se s'indica con a una di queste radici, sarà:

$$\mu(a+t)=t^2\theta(a+t) ;$$

e qui trattasi di calcolare i primi due termini dello sviluppo di $\theta(a+t)$. Mutando nella data funzione la x in $a+t$, abbiamo:

$$\mu(a+t)=[(a+t)-1][(a+t)^3-1][(a+t)^5-1][(a+t)^6-1]$$

Ora, prima di sviluppare i fattori osserveremo che, essendo $a^2+a+1=0$, e quindi $a^3+a^2+a=0$, se si prenda la differenza di queste due equazioni, verrà $a^3=1$; e sarà di seguito $a^4=a, a^5=a^2, a^6=1$, etc:; di modo che la ipotesi di a radice dell'equazione $x^2+x+1=0$ mena alla conseguenza che dagli esponenti delle potenze di a è lecito di sopprimere tutt'i multipli di 3; ed è così per esempio che si avrebbe $a^{10}=a^7=a^4=a$.

Ciò premesso, essendo $a^3=1$ ed $a^6=1$, è manifesto che, se si svilup-

pano i quattro fattori, il terzo ed il quarto diverranno divisibili per t. Adunque messo da parte questo divisore, e limitando gli sviluppi a'termini di primo grado in t, si avrà:

$$\mu(a+t)=t^2[((a-1)+t)(3a^2+3at)((a^5-1)+5a^4t)(6a^5+15a^4t)+....] ;$$

e quindi, riducendo gli esponenti di a col principio dichiarato, risulterà:

$$\theta(a+t)=9a^2[((a-1)+t)(a+t)((a^2-1)+5at)(2a+5t)]+....$$

A questo punto svilupperemo il prodotto; e però, limitando sempre il calcolo a'termini di 1° grado in t, e continuando a ridurre gli esponenti di a, verrà:

$$\theta(a+t)=-9[(2a^2-4a+2)+(17a^2+9a-26)t+...]$$

e sarà in conseguenza:

$$\theta=-9(2a^2-4a+2) \quad , \quad \theta'=-9(17a^2+9a-26) .$$

Queste due espressioni possono ridursi al 1° grado mediante l'equazione $a^2+a+1=0$; e così aggiungendo rispettivamente ad esse le quantità nulle $(2a^2+2a+2)$ e $9(17a^2+17a+17)$, si avrà in fine:

$$\theta=9.6a \quad , \quad \theta'=9(8a+43) .$$

In quanto alle radici semplici per ciascuna si tratta sempre di calcolare la sola quantità θ. Ora, in generale, questa quantità si può ottenere con una regola semplicissima. In fatti per ogni radice semplice dell'equazione $\mu(x)=0$ si ha $\theta=\mu'$, e quindi è chiaro che, per avere il valore di θ basta porre la radice che si considera invece di x in tutti i fattori della funzione $\mu(x)$, ad eccezione di quello dal quale la radice trae origine, sostituendo poi a questo fattore il valore che prende la sua derivata per la stessa radice.

Così nell'esempio proposto, se si dinota con b una delle quattro radici dell'equazione $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, siccome queste radici dipendono dal fattore x^5-1, si ha immediatamente:

$$\theta=5b^4(b-1)(b^3-1)(b^6-1) .$$

Ma questa espressione, stante l'equazione $b^4+b^3+b^2+b+1=0$, può es-

sere ridotta a grado inferiore al 4°; e la riduzione si farà molto più facilmente osservando cho b è una radice doll'equazione binomia $x^5=1$; e che perciò dagli esponenti delle potenze di x è lecito di sopprimere tutt'i multipli di 5. Quindi si ottiene immediatamente:

$$\theta=-5(2b^3-b^2+b-2) .$$

Parimenti, chiamando c una delle tre radici semplici dell'equazione $x^3+1=0$, la quale trae origine dal fattore x^6-1, avremo:

$$\theta=6c^2(c-1)(c^2-1)(c^3-1) .$$

Questa espressione, essendo $c^3+1=0$, è riducibile a grado inferiore al 3°. Inoltre essendo c radice dello equazioni binomie $x^3+1=0$ ed $x^6-1=0$, segue dalla seconda che dagli esponenti delle potenze di c si possono sopprimere i multipli di 6; e, dalla prima, che è anche lecito di sopprimerne i multipli di 3, purchè si cambii il segno alla potenza ridotta, quando il multiplo soppresso è di ordine dispari. In questo modo il valore di θ si riduce a:

$$\theta=12(2c^2-c+1) .$$

IV

Metodo pel calcolo effettivo de'coefficienti dei termini generali.

22. Abbiamo fin qui diverse espressioni dell'elemento di Q_n o P_n dovuto a qualunque radice doll'equazione $\mu(x)=0$; ed in ogni caso la somma di tutti gli elementi darà l'espressiono istessa di Q_n o di P_n. Però queste espressioni, dipendendo dalle singole radici, sarebbero poco utili nelle applicazioni, se non si avessero de' mezzi agevoli da tradurle in numeri; ma ora ci proponiamo di mostrare che i loro valori si possono facilmente ottenere per mezzo delle somme delle potenze simili delle radici di una o più equazioni.

Questa ricerca è fondata sulla seguente conosciuta proposizione (*).

« Ogni funzione fratta razionale di una radice di una equazione è equi-« valente ad una determinata funzione intera della stessa radice, di

(*) V. Serret, *Cours d'Algeb. Sup.* (2e éd.) pag. 38, e la nota in fine della presente memoria.

« grado inferiore, e generalmente inferiore di *uno*, a quello dell'equazione.

Dinotiamo con a una radice dell'equazione:

$$f(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots+k_rx^r=0\ ,$$

e siano $\varphi(a)$ e $\psi(a)$ funzioni intere e razionali. In virtù del principio ricordato la funzione fratta $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ si potrà trasformare in una funzione intera di a di grado $r-1$, e quindi sarà lecito di supporre:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=A^{(0)}+A'a+A''a^2+\ldots+A^{(r-1)}a^{r-1}$$

Per determinare le costanti A^0, A', etc. si osserverà ohe questa eguaglianza, o l'altra:

$$\varphi(a)=(A^0+A'a+A''a^2+\ldots+A^{(r-1)}a^{r-1})\psi(a)$$

deve sussistere se in luogo di a si ponga qualunque altra radice dell'equazione $f(x)=0$; e perciò l'ultima equazione in a sarà verificata da r valori. Ora questa equazione è di grado superiore ad $r-1$; ma bisogna riflettere che, mediante l'equazione:

$$f(a)=k_0+k_1a+k_2a^2+\ldots+k_ra^r=0$$

le potenze a^r, a^{r+1}, etc: si possono esprimere in funzione delle potenze di grado minore di r; di modo che la detta equazione si potrà ridurre al grado $r-1$, e conseguentemente alla forma:

$$K_0+K_1a+K_2a^2+\ldots+K_{r-1}a^{r-1}=0\ ,$$

nella quale i coefficienti sono funzioni date lineari delle r costanti A^0, $A^1,\ldots, A^{(r-1)}$. Intanto questa equazione di grado $r-1$, dovendo essere soddisfatta da r valori di a, è necessariamente identica; e da ciò risultano le r equazioni lineari

$$K=0\quad ,\quad K_1=0\quad ,\quad K_2=0\ ,\ldots,K_{r-1}=0\ ,$$

le quali determinano completamente le r costanti.

È da osservare che il ragionamento più non regge se il valore di a,

che si suppone radice dell'equazione $f(x)=0$, annulla il denominatore $\psi(a)$ della data frazione. Dunque, perchè la trasformazione sia possibile, si richiede che questo denominatore non sia annullato da alcuna di quelle radici; e ciò vuol dire, in altri termini, che le due funzioni $f(x)$ e $\psi(x)$ debbono essere prime fra loro.

23. Tornando al soggetto delle nostre ricerche per considerare la quistione in tutta la sua generalità ammetteremo che la funzione $\mu(x)$ si possa risolvere in più fattori razionali primi tra loro, e supporremo:

$$\mu(x)=X_a^\alpha X_b^\beta X_c^\gamma \ldots.$$

dove α, β, γ, etc: figurano numeri interi e positivi, ed X_a, X_b, X_c, etc. funzioni intere qualunque, delle quali dinoteremo rispettivamente i gradi con a', b', c', etc. Inoltre, ritenute disuguali le radici delle equazioni $X_a=0$, $X_b=0$, $X_c=0$, etc: chiameremo a, a_1, a_2; etc: quelle della prima; b, b_1, b_2, etc: quelle della seconda; e così di seguito.

Ciò premesso osserveremo che le quantità designate con a, a_1, a_2,...., mentre per ipotesi sono radici semplici dell'equazione $X_a=0$, sono poi anche radici dell'equazione $\mu(x)=0$, ma tutte multiple di grado α; e perciò le espressioni degli elementi corrispondenti di $F(n)$ (V. il n° 2) saranno funzioni simili delle stesse radici. Ne risulta che la somma di questi elementi è una funzione simmetrica delle radici dell'equazione $X_a=0$, e sarà quindi esprimibile razionalmente per mezzo de'suoi coefficienti. Per brevità distingueremo siffatta somma col nome di *componente* della funzione $F(n)$ relativa al fattore X_a^α, e la rappresenteremo con W_a; ed uniformemente dinoteremo con W_b la componente relativa al fattore X_b^β; con W_c quella relativa ad X_c^γ, etc: etc:

È chiaro intanto che la funzione $F(n)$ equivale alla somma di tutte le sue componenti, di modo che si ha:

$$F(n)=W_a+W_b+W_c+\ldots=\Sigma W_x$$

Così la ricerca di quella funzione si riduce interamente alla ricerca delle sue componenti; ed è però che passeremo ad esporre un metodo mediante il quale le loro espressioni possono agevolmente ottenersi tradotte in somme di potenze simili delle radici delle equazioni $X_a=0$, $X_b=0$, etc:

CALCOLO DELLE COMPONENTI DI Q_{α}.

24. Considerando la componente W_{α}, che per ipotesi è somma degli elementi di Q_{α} dovuti alle radici dell'equazione $X_{\alpha}=0$, in virtù della formola (17) avremo:

$$W_{\alpha}=\Sigma\left((n)_{\alpha-1}A_0+(n)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(n)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}\right)a^{n-\alpha+1},$$

estendendo la somma a tutte le suddette radici; ma se si ponga:

$$V=(n)_{\alpha-1}A_0+(n)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(n)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1},$$

verrà più concisamente:

$$W_{\alpha}=\Sigma Va^{n-\alpha+1}.$$

Ora l'espressione di questa somma si può ottenere di una maniera molto semplice nel modo seguente. Si osservi innanzi tutto che la quantità rappresentata da V è una data funzione razionale di n e di a, però intera e di grado $\alpha-1$ rispetto ad n, ma fratta rispetto ad a, tale essendo la natura delle quantità figurate da A_0, A_1, etc: (n° 17). Quindi, siccome a è radice dell'equazione $X_{\alpha}=0$, che si è supposta di grado α', la V si potrà trasformare in una determinata funzione intera di a, di grado $\alpha'-1$ (n° 22), e porre:

$$V=A_n^0+A_n'a+A_n''a^2+\ldots+A_n^{(\alpha'-1)}a^{\alpha'-1}, \tag{22}$$

dove i coefficienti sono indipendenti da a, ma funzioni di n, intere e di grado $\alpha-1$. Una volta ottenuta questa trasformata la quistione è risoluta; per essa in fatti l'espressione di W_{α} diviene:

$$W_{\alpha}=\Sigma\left(A_n^0a^{n-\alpha+1}+A_n'a^{n-\alpha+2}+A_n''a^{n-\alpha+3}+\ldots+A_n^{(\alpha'-1)}a^{n-\alpha+\alpha'}\right);$$

ed essendosi già osservato (n° 23) che le espressioni degli elementi di Q_{α} relativi alle radici a, a_1, a_2, ..., sono funzioni simili delle stesse radici, si vede che per aver la somma basta mutare le diverse potenze di a in somme di potenze simili delle radici dell'equazione $X_{\alpha}=0$, di gradi rispet-

tivamente uguali a quelli delle potenze; e perciò scrivendo $s_r^{(a)}$ per indicare la somma delle potenze r^{me} di queste radici, risulterà:

$$(23) \qquad W_a = A_n^0 s_{n-\alpha+1}^{(a)} + A_n' s_{n-\alpha+2}^{(a)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{n-\alpha+a'}^{(a)} \,.$$

Ecco adunque un'espressione razionale della componente W_a, alla quale ne'casi particolari si applica facilmente il calcolo numerico; ed il processo per ottenerla si può compendiare in questa regola: *Si trasformi la* V *in funzione intera di* a; *si moltiplichi la trasformata per* $a^{n-\alpha-1}$, *e nel prodotto si sostituisca ad ogni potenza* a^r *la somma corrispondente* $S_r^{(a)}$.

Mediante questa regola, convenientemente estesa alle altre componenti, si avrebbe, *mutatis mutandis:*

$$W_b = B_n^0 s_{n-\beta+1}^{(b)} + B_n' s_{n-\beta+2}^{(b)} + \ldots + B_n^{(b'-1)} s_{n-\beta+b'}^{(b)} \;;$$

$$W_c = C_n^0 s_{n-\gamma+1}^{(c)} + C_n' s_{n-\gamma+2}^{(c)} + \ldots + C_n^{(c'-1)} s_{n-\gamma+c'}^{(c)} \;;$$

etc: etc: etc: etc:

e però, essendo così trovate le espressioni di tutte le componenti della funzione Q_n, questa funzione resta con ciò completamente determinata.

25. L'espressione di W_a data nella formola (23) consiste di un numero di termini uguale ad a', e per conseguenza uguale al grado della funzione X_a. In questi termini gl'indici delle s formano una serie di numeri naturali che comincia da $n-\alpha+1$; ma questa circostanza non è assoluta, e la detta serie può farsi cominciare da qualunque altro numero, perchè nella espressione $Va^{n-\alpha-1}$ il fattore V, che va trasformato in funzione intera di a, si può modificare moltiplicandolo per una potenza qualunque di a, e dividendo nello stesso tempo per questa potenza l'altro fattore. Così, dinotato con r un numero qualsivoglia intero, positivo, o negativo, sarà lecito di scrivere:

$$W_a = \Sigma \frac{V}{a^r} a^{n-\alpha+r-1} \;;$$

quindi, invece di trasformare la funzione V, si trasformerà la funzione $\frac{V}{a^r}$, e la serie degl'indici comincerà dal numero $n-\alpha+r+1$. Per esem-

pio, volendo che questa serie cominci da n, si prenderà $r=\alpha-1$; ed allora operando la trasformazione:

$$\frac{V}{a^{\alpha-1}}=A_n^{\circ}+A'_n a+A''_n a^2+\ldots+A_n^{(\alpha'-1)}a^{\alpha'-1}$$

l'espressione di W_α prenderà la forma:

$$(24)\qquad W_\alpha=A_n^{\circ}s_n^{(\alpha)}+A'_n s_{n+1}^{(\alpha)}+A''_n s_{n+2}^{(\alpha)}+\ldots+A_n^{(\alpha'-1)}s_{n+\alpha'-1}^{(\alpha)}\ .$$

Attualmente i valori de'coefficienti A_n°, A'_n, etc: sono diversi da quelli di prima; ma sono tuttavia funzioni intere di n, di grado $\alpha-1$.

26. Il principio, sul quale è fondata l'ultima trasformazione, è utile sopra tutto allorquando la funzione fratta di a, rappresentata da V, si trovasse moltiplicata per una potenza di a, di esponente positivo, o negativo, ma indeterminato, circostanza la quale potrebbe rendere imbarazzante la sua trasformazione in funzione intera. In fatti, per togliere la difficoltà, nella espressione del prodotto $Va^{n-\alpha-1}$ basta di separare quella potenza dal fattore V, ed aggregarla all'altro fattore $a^{n-\alpha-1}$; ed allora la funzione fratta di a da trasformarsi in funzione intera sarà per lo appunto ciò che diviene la V dopo la soppressione della detta potenza.

27. Abbiamo già veduto che nelle formole precedenti le espressioni de'coefficienti A_n°, A'_n, etc: sono funzioni intere di n, di grado $\alpha-1$. Ora è questo un fatto interessante, dal quale vedremo derivare un'altra osservabile soluzione della quistione dello sviluppo in serie delle funzioni fratte razionali; ma per ora ci limitiamo ad osservare che le dette espressioni debbono essere indipendenti da n nel caso di $\alpha=1$, vale a dire quando il fattore X_α^{α} della funzione $\mu(x)$, cui si rapporta la componente W_α, è semplicemente della forma X_α. In questo caso diviene inutile l'indice n apposto ai simboli degl'indicati coefficienti; ed intanto l'espressione di W_α data dalla (23) o dalla (24) si riduce a:

$$(25)\qquad W_\alpha=A^{\circ}s_n^{(\alpha)}+A's_{n+1}^{(\alpha)}+A''s_{n+2}^{(\alpha)}+\ldots+A^{(\alpha'-1)}s_{n+\alpha'-1}^{(\alpha)}$$

Del resto nella ipotesi attuale la determinazione de'coefficienti A°, A', etc.,

ossia la trasformazione (22), diviene molto più agevole, perchè quando $\alpha=1$ si ha semplicemente (n° 13)

$$W_n = \Sigma \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^n ;$$

e tutto si riduce ad operare la trasformaziono della funzione $V = \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}$.

28. Un altro caso meritevole di attenzione si ha quando la funzione $\mu(x)$ è della forma:

$$\mu(x) = X_\alpha^\alpha ,$$

il che esige che lo radici dell'equazione $\mu(x)=0$ debbono essere tutte multiple di uno stesso grado di moltiplicità. In questo caso la funzione Q_n si riduce all'unica sua componente W_α; e perciò risulta:

$$Q_n = W_\alpha .$$

Ora, siccome nella ipotesi presente le somme delle potenze simili delle radici si rapportano all'unica equazione $X_\alpha=0$, nel simbolo adoperato a tale uopo, $s_r^{(\alpha)}$, diviene inutile l'indice superiore; e si avrà in conseguenza:

$$Q_n = A_n^0 s_{n-\alpha+1} + A_n' s_{n-\alpha+2} + \ldots + A_n^{(\alpha'-1)} s_{n-\alpha+\alpha'} , \tag{26}$$

ovvero:

$$Q_n = A_n^0 s_n + A_n' s_{n+1} + \ldots + A_n^{(\alpha'-1)} s_{n+\alpha'-1} ; \tag{27}$$

secondo che la determinazione de' coefficienti si voglia far dipendere dalla trasformazione della funzione V, o dell'altra $\frac{V}{a^{\alpha-1}}$.

E quando $\alpha=1$; o, in altri termini, quando le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ sono tutte semplici, di guisa che:

$$\mu(x) = X_1 ,$$

si avrà semplicemente:

$$Q_n = A^0 s_n + A' s_{n+1} + \ldots + A^{(\alpha'-1)} s_{n+\alpha'-1} . \tag{28}$$

29. Bisogna intanto osservare che le trasformazioni cui dà luogo la pre-

sente ricerca saranno nelle applicazioni assai più semplici se lo sviluppo di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ si faccia dipendere da quello di $\frac{1}{\mu(x)}$ (n° 4). In questo caso i calcoli or ora prescritti dovranno istituirsi sulla formola (20) da cui:

$$W_n = \Sigma \left[(n)_{\alpha-1} \frac{\Delta_0}{\theta} - (n)_{\alpha-2} \frac{\Delta_1}{\theta^2} a + \ldots + (-1)^{\alpha-1} (n)_0 \frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha} a^{\alpha-1} \right] a^{n-\alpha+1}$$

e quindi per la funzione fratta di a rappresentata da V ritenere la funzione molto più semplice e più esplicita:

$$(n)_{\alpha-1} \frac{\Delta_0}{\theta} - (n)_{\alpha-2} \frac{\Delta_1}{\theta^2} a + \ldots + (-1)^{\alpha-1} (n)_0 \frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha} a^{\alpha-1}.$$

Siccome in questa funzione le espressioni di Δ_1, Δ_2, etc: sono intere rispetto ad a, è chiaro che per ottenere la equivalente funzione intera, basta trovare la funzione intera equivalente alla frazione $\frac{1}{\theta}$, dalla quale possono immediatamente dedursi quelle equivalenti alle diverse potenze della frazione medesima (V. la nota in fine).

Calcolo delle componenti di P_n.

30. Prendendo ancora a considerare la componente W_a, per la formola (18) si avrà:

$$W_a = \Sigma - \{ (-n-1)_{\alpha-1} A_0 + (-n-1)_{\alpha-2} A_1 a + \ldots + (-n-1)_0 A_{\alpha-1} a^{\alpha-1} \} a^{-(n+\alpha)},$$

la somma dovendo estendersi a tutte le radici dell'equazione $X_1 = 0$; e se si ponga:

$$U = - \{ (-n-1)_{\alpha-1} A_0 + (-n-1)_{\alpha-2} A_1 a + \ldots + (-n-1)_0 A_{\alpha-1} a^{\alpha-1} \},$$

sarà più brevemente:

$$W_n = \Sigma U a^{-(n+\alpha)}.$$

Qui la U, al pari della V del caso precedente, è una data funzione di n ed a; intera e di grado $\alpha - 1$ rispetto ad n; fratta rispetto ad a; e però,

stante l'equazione $X_\alpha = 0$, potrà essere trasformata in una determinata funzione intera di a, di grado $a'-1$; sicchè, supponendo:

$$U = A_n^0 a^{a'-1} + A_n' a^{a'-2} + \ldots + A_n^{(a'-1)},$$

risulterà;

$$W_\alpha = A_n^0 s^{(\alpha)}_{-(n+\alpha-a'+1)} + A_n' s^{(\alpha)}_{-(n+\alpha-a'+2)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s^{(\alpha)}_{-(n+\alpha)} \,. \tag{29}$$

Questa espressione di W_α, nella quale i coefficienti A_n^0, A', etc: sono sempre funzioni intere di n di grado $\alpha-1$ si ottiene evidentemente con una regola uniforme a quella enunciata nell'altro caso; vale a dire: *Si trasformerà la* U *in funzione intera di* a; *si moltiplicherà la trasformata per* $a^{(n-\alpha)}$; *e nel prodotto ad ogni potenza* a^{-r} *si sostituirà la somma corrispondente* $s_{-r}^{(\alpha)}$. Per mezzo di questa regola si possono adunque ottenere le espressioni di tutte le componenti della funzione P_n; e con ciò questa funzione resta completamente determinata.

31. È ora ben chiaro che le diverse osservazioni fatte a riguardo dello componenti di Q_n si estendono convenientemente a quelle di P_n. Così può notarsi che la formola (29) consiste di un numero di termini egualo ad a', grado della funzione X_α: formola in cui gl'indici delle s (fatta astrazione dal segno) costituiscono una serie di numeri naturali, che comincia da $n+\alpha-a'+1$, ma che può farsi cominciare da qualunque numero negativo. Volendo che cominci da $-n$ si scriverà;

$$W_\alpha = \Sigma \frac{U}{a^{\alpha-a'+1}} a^{-(n+\alpha-a'-1)};$$

e, trasformando il fattore $\frac{U}{a^{\alpha-a'+1}}$, verrà:

$$W_\alpha = A_n^0 s^{(\alpha)}_{-n} + A_n' s^{(\alpha)}_{-(n+1)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s^{(\alpha)}_{-(n+a'-1)} \,. \tag{30}$$

I coefficienti A_n^0, A_n', etc: diversi da'primi, sono, come negli altri casi, funzioni intere di n, di grado $\alpha-1$.

32. Cessano questi coefficienti di dipendere da n nel solo caso di $\alpha=1$;

allora la determinazione della componente diviene molto più semplice, perchè si ha (n° 13)

$$W_a = \Sigma - \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^{-(n-1)};$$

e la quistione si riduce a trasformare la funzione fratta $U = -\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}$. In questo modo gl'indici delle s cominceranno da $-(n-a'+2)$, e si avrà:

$$W_a = A_a s^{(a)}_{-(n-a'+2)} + A'_a s^{(a)}_{-(n-a'+3)} + \ldots + A^{(a'-2)} s^{(a)}_{-(n+1)} .$$

Ma volendo che gl'indici comincino da $-n$ si scriverebbe:

$$W_a = \Sigma - \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^{a'-2} \times a^{-(n+a'-2)};$$

e quindi, trasformando la funzione $-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^{a'-2}$, si avrà:

$$W_a = A^0 s^{(a)}_{-n} + A' s^{(a)}_{-(n+1)} + \ldots + A^{(a'-2)} s^{(a)}_{-(n+a'-2)} . \tag{31}$$

33. Anche nel caso attuale, se le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ sono tutte multiple di uno stesso grado, e quindi la funzione $\mu(x)$ della forma:

$$\mu(x) = X_a^a$$

si ha $P_a = W_a$; vale a diro sarà:

$$P_a = A_n^0 s_{-(n+\alpha-a'+2)} + A'_n s_{-(n+\alpha-a'+3)} + \ldots + A_n^{(a'-2)} s_{-(n+\alpha)} ,$$

se i coefficienti si fanno dipendere dalla trasformazione della funzione U; e sarà poi:

$$P_n = A_n^0 s_{-n} + A'_n s_{-(n+1)} + \ldots + A_n^{(a'-2)} s_{-(n+a'-2)} , \tag{32}$$

se si vogliano far dipendere da quella dell'altra funzione $\frac{U}{a^{\alpha-a'+2}}$.

34. E finalmente, se nella stessa ipotesi si abbia di più $\alpha=1$; o, in

altri termini, se le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ siano tra loro tutte disuguali, ed in conseguenza:

$$\mu(x)=X_\alpha,$$

si avrà semplicemente:

$$P_n=A^0 s_{-(n-\alpha'+2)}+A' s_{-(n-\alpha'+3)}+\ldots+A^{(\alpha'-2)} s_{-(n+1)};$$

ovvero:

$$(33)\qquad P_n=A^0 s_{-n}+A' s_{-(n+1)}+\ldots+A^{(\alpha'-2)} s_{(n+\alpha'-2)},$$

secondo chè i coefficienti si vogliano far dipendere dalla trasformazione della funzione $U=-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}$, o dell'altra $U\,a^{\alpha'-2}=-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}\,a^{\alpha'-2}$.

35. Se lo sviluppo di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ si voglia far dipendere da quello di $\frac{1}{\mu(x)}$, il che torna sempre vantaggioso, allora bisogna far capo dalla formola:

$$W_\alpha=$$

$$\Sigma-\left[(-n-1)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(-n-1)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right]a^{-(n+\alpha)},$$

e ritenere:

$$U=-\left[(-n-1)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(-n-1)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right];$$

e qui le trasformazioni delle funzioni fratte in funzioni intere dipenderanno, come nel primo caso da quella della frazione $\frac{1}{\theta}$.

ESEMPII DI SVILUPPI

Esempio I.

36. Per un primo esempio ci proporremo lo sviluppo della frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)}=\frac{1}{\mu_0+2\mu_1 x+\mu_2 x^2}$$

dove supporremo disuguali le radici dell'equazione $\mu(x)=0$. E cercando dapprima l'espressione di Q_n, dinotata con a una delle radici, si avrà (n° 28)

$$Q_n=\Sigma\frac{1}{\mu'(a)}a^n=\Sigma\frac{1}{2(\mu_1+\mu_2 a)}a^n,$$

la somma dovendo estendersi a tutte le radici. Per trovare questa somma

bisogna trasformare il fattore fratto in funzione intera di a, e ciò mediante l'equazione:

$$\mu_0 + 2\mu_1 a + \mu_2 a^2 = 0\ ;$$

ma ora la trasformata può subito aversi indipendentemente da metodi generali; perchè, se si ponga per compendio:

$$M = \mu_1^2 - \mu_0\mu_2\ ,$$

la detta equazione si potrà mettere prima nella forma $(\mu_1 + \mu_2 a)^2 = M$, e poi nell'altra:

$$\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 a} = \frac{1}{M}(\mu_1 + \mu_2 a)\ ;$$

ed il secondo membro è per lo appunto la trasformata intera del primo. Adunque, chiamando s_r la somma delle potenze r^{me} delle radici dell'equazione $\mu(x) = 0$, si avrà immediatamente:

$$Q_n = \frac{1}{2M}(\mu_1 s_n + \mu_2 s_{n+1})\ .$$

In quanto alla espressione di P_n si avrebbe:

$$P_n = \Sigma - \frac{1}{\mu'(a)} a^{-(n+1)} = \Sigma - \frac{1}{2(\mu_1 + \mu_2 a)} a^{-(n+1)}\ ;$$

e quindi per le stesse formole di poc'anzi risulta:

$$P_n = -\frac{1}{2M}(\mu_2 s_{-n} + \mu_1 s_{-(n+1)})\ .$$

37. Nel caso particolare della frazione

$$\frac{1}{1 - 2x\cos\omega + x^2}$$

siccome $\mu_0 = \mu_2 = 1$, $\mu_1 = -\cos\omega$, e quindi $M = -sen^2\omega$ ed $s_{-r} = s_r$, si ha:

$$Q_n = \frac{1}{2\,\text{sen}^2\omega}(\cos\omega\, s_n - s_{n+1}) \quad , \quad P_n = \frac{1}{2\,\text{sen}^2\omega}(s_n - \cos\omega\, s_{n+1})\ .$$

Ma le radici di $1-2x\cos\omega+x^2=0$ mostrano che $s_r=2\cos r\omega$; dunque le ultime espressioni divengono:

$$Q_n=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\Big[\cos\omega\cos n\omega-\cos(n+1)\omega\Big],\ P_n=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\Big[\cos n\omega-\cos\omega\cos(n+1)\omega\Big];$$

e poichè i fattori binomii equivalgono il primo a $\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}n\omega$, ed il secondo a $\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n+1)\omega$, così verrà semplicemente:

$$Q_n=\frac{\operatorname{sen}n\omega}{\operatorname{sen}\omega}\qquad,\qquad P_n=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\omega}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Dopo ciò, se si trattasse dello sviluppo della frazione:

$$\frac{\lambda_0+\lambda_1 x}{1-2x\cos\omega+x^2},$$

si avrebbe immediatamente (n° 4):

$$Q_n=\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\Big[\lambda_0\operatorname{sen}n\omega+\lambda_1\operatorname{sen}(n+1)\omega\Big],\ P_n=\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\Big[\lambda_0\operatorname{sen}(n+1)\omega+\lambda_1\operatorname{sen}n\omega\Big].$$

Esempio II.

38. Siano $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_r$ quantità disuguali, e cerchiamo lo sviluppo della frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)}=\frac{1}{(1-2\rho_0x+x^2)(1-2\rho_1x+x^2)\dots(1-2\rho_rx+{}^2)}=\frac{1}{X_0X_1\dots X_r}.$$

Dinotata con W_i la componente di Q_n relativa al fattore X_i, si ha (n° 23):

$$Q_n=\sum_0^r W_i$$

ed intanto, se s'indica con a una delle due radici dell'equazione $X_i=0$, sarà (n° 27):

$$W_i=\Sigma\frac{1}{\mu'(a)}a^n,$$

estendendo la somma alle due radici. Da un'altra parte abbiamo:

$$\mu'(a)=2(a-\rho_i)X_0X_1\dots X_{i-1}X_{i+1}\dots X_r,$$

bene inteso che sia posta a per x in tutti i fattori X_0, X_1, etc: ma tolta

da ciascuno la quantità nulla $1-2\rho_i a+a^2$, e messo per compendio:

$$R_i=(\rho_i-\rho_0)(\rho_i-\rho_1)\ldots(\rho_i-\rho_{i-1})(\rho_i-\rho_{i+1})\ldots(\rho_i-\rho_r)\ ,$$

verrà più semplicemente:

$$\mu'(a)=2^{r-1}R_i a^r(a-\rho_i)\ ;$$

e si avrà in conseguenza:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_i}\Sigma\frac{1}{a^r(a-\rho_i)}a^n=\frac{1}{2^{r-1}R_i}\Sigma\frac{1}{a-\rho_i}a^{n-r}\ .$$

Resta ora a trasformare la frazione $\frac{1}{a-\rho_i}$ in funzione intera di a; ma poichè la trasformazione dipende dall'equazione $1-2\rho_i a+a^2=0$, la quale, posto:

$$M_i=\rho_i^2-1\ ,$$

può ridursi alla forma $(a-\rho_i)^2=M_i$, così si ha immediatamente:

$$\frac{1}{a-\rho_i}=\frac{1}{M_i}(a-\rho_i)$$

e quindi:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_i M_i}\Sigma(a-\rho_i)a^{n-r}.$$

Effettuando la somma si ottiene:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_i M_i}\left(s^{(i)}_{n-r+1}-\rho_i s^{(i)}_{n-r}\right)\ ;$$

ed in fine:

$$Q_n=\frac{1}{2^{r-1}}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_i M_i}\left(s^{(i)}_{n-r+1}-\rho_i s^{(i)}_{n-r}\right)\ .$$

In quanto allo sviluppo ascendente si avrebbe:

$$P_n=\sum_0^r{}_i W_i\ ,$$

dove, tenendo presenti le formole precedenti:

$$W_i=\Sigma-\frac{1}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{2^{r-1}R_i M_i}\Sigma(a-\rho_i)a^{-(n+r+1)}\ ;$$

ed effettuando la somma:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_iM_i}\left(s_i\rho^{(i)}_{n-r-1}-s^{(i)}_{n-r}\right) ;$$

sicchè risulta:

$$P_n=\frac{1}{2^{r-1}}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_iM_i}\left(\rho_i s^{(i)}_{n-r-1}-s^{(i)}_{n-r}\right) .$$

39. Supponiamo per un caso particolare che si tratti della frazione:

$$\frac{1}{(1-2x\cos\omega_0+x^2)(1-2x\cos\omega_1+x^2)\ldots(1-2x\cos\omega_r+x^2)} .$$

Essendo in questo caso $\rho_i=\cos\omega_i$, si ottiene, come nel primo esempio, $M_i=-\text{sen}^2\omega_i$, $s^{(i)}_m=2\cos m\omega_i$; e quindi le espressioni di Q_n e P_n divengono:

$$Q_n=\frac{1}{2^r}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_i\,\text{sen}^2\omega_i}\Big[\cos\omega_i\cos(n-r)\omega_i-\cos(n-r+1)\omega_i\Big] ;$$

$$P_n=\frac{1}{2^r}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_i\,\text{sen}^2\omega_i}\Big[\cos(n+r)\omega_i-\cos\omega_i\cos(n+r+1)\omega_i\Big] ;$$

ma le quantità in parentesi equivalgono rispettivamente a $\text{sen}\,\omega_i\,\text{son}(n-r)\omega_i$, e $\text{sen}\,\omega_i\,\text{sen}(n+r+1)\omega_i$; dunque per gli sviluppi della frazione proposta si hanno le formole semplicissime:

$$Q_n=\frac{1}{2^r}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_i}\,\frac{\text{sen}(n-r)\omega_i}{\text{sen}\,\omega_i} \quad , \quad P_n=\frac{1}{2^r}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_i}\,\frac{\text{sen}(n+r+1)}{\text{sen}\,\omega_i} .$$

Esempio III.

40. Per un terzo esempio cercheremo lo sviluppo della frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)}=\frac{1}{\mu_0+3\mu_1x+3\mu_2x^2+\mu_3x^3} ,$$

supponendo ancora disuguali le radici dell'equazione $\mu(x)=0$. Quindi, detta a una delle radici, si ha:

$$Q_0=\Sigma\frac{1}{\mu'(a)}a^n=\Sigma\frac{1}{3(\mu_1+2\mu_2a+\mu_3a^2)}a^n ,$$

la somma dovendo estendersi a tutte le radici; e per trovarla bisogna

che il fattore frazionario sia trasformato in funzione intera di a, valendosi dell'equazione:

$$\mu_0+3\mu_1 a+3\mu_2 a^2+\mu_3 a^3=0 \, .$$

Ora, operando la trasformazione col metodo già esposto (n° 22), fatto per compendio:

$$A^0=\mu_0\mu_2\mu_3+3\mu_1\mu_2^2-4\mu_1^2\mu_3 \, ,$$

$$A'=\mu_0\mu_3^2-7\mu_1\mu_2\mu_3+6\mu_2^3$$

$$A''=\mu_2^2-\mu_1\mu_3$$

$$M=6\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3+3\mu_1^2\mu_2^2-4\mu_0\mu_2^3-4\mu_1^3\mu_3-\mu_0^2\mu_3^2 \, ,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\mu_1+2\mu_2 a+\mu_3 a^2}=\frac{1}{M}\left(A^0+A'a+2\mu_3 A''a^2\right) ;$$

ed in conseguenza risulta:

$$Q_n=\frac{1}{3M}\left(A^0 s_n+A's_{n-1}+2\mu_3 A''s_{n-2}\right) .$$

Per lo sviluppo ascendente si avrebbe:

$$P_n=\Sigma-\frac{1}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{\mu_1+2\mu_2 a+\mu_3 a^2}a^{-(n+1)} ;$$

quindi per le stesse formole di poc'anzi:

$$P_n=-\frac{1}{3M}\Sigma\left(A^0+A'a+2\mu_3 A''a^2\right)a^{-(n+1)} ;$$

e perciò:

$$P_n=-\frac{1}{3M}\left[A^0 s_{-(n+1)}+A's_{-n}+2\mu_3 A''s_{-(n-1)}\right] .$$

Esempio IV.

41. Crediamo opportuno di richiamare l'attenzione de' giovani studiosi sopra un esempio considerato dall' egregio Geometra Francese signor Eugenio Catalan nel suo stimabilissimo libro sulle serie, pubblicato a Parigi nel 1860: esempio che forma il soggetto de' numeri 129 e 130 a pag. 76 e 77. Trattandosi di un libro la di cui lettura torna utilissima agli studiosi, ci è sembrato necessario di rettificare alcune idee poco

esatte, che ivi si trovano espresse; ma dichiariamo ad un tempo che queste inesattezze sono, senza dubbio, da attribuirsi a sconcerti di stampa avvenuti in quelle pagine, i quali avranno alterato il concetto dell'Autore. Trattasi per tanto dello sviluppo ascendente della funzione $\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}$, e quindi si vede che questo sviluppo potrebbe subito farsi dipendere da quello dell'esempio precedente; ma preferiamo di occuparcene direttamente, e però supporremo:

$$\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}=P_0+P_1x+P_2x^2+\ldots+P_nx^n+\ldots$$

Cangiando x in $\frac{1}{x}$ (V. il n° 3), e poi divedendo i due membri per x, risulta:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-1}=\frac{P_0}{x}+\frac{P_1}{x^2}+\frac{P_2}{x^3}+\ldots+\frac{P_n}{x^{n+1}}+\ldots;$$

ed allora la quistione è ridotta a trovare l'espressione di P_n coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente della funzione $\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-1}$. Poichè l'equazione $x^3+x^2-1=0$ ha le radici disuguali, se s'indica con a una di esse, avremo immediatamente (numeri 27 e 28)

$$P_n=\Sigma\frac{a^2+a-1}{3a^2+2a}a^n,$$

la somma dovendo estendersi alle tre radici; e più non resta che a trasformare il fattore frazionario sotto il segno Σ in funzione intera di a, mediante l'equazione

$$a^3+a^2-1=0.$$

Si può agevolare la trasformazione di quel fattore, moltiplicandone i due termini per a, e poscia sostituendo ad a^3 il valore $1-a^2$, che ne dà l'ultima equazione. Si ottiene in siffatta guisa

$$\frac{a^2+a-1}{3a^2+2a}=\frac{1-a}{3-a^2}$$

e si ha in conseguenza:

$$P_n=\Sigma\frac{1-a}{3-a^2}a^n.$$

Operando ora la trasformazione col metodo già prescritto (n° 22), si ottiene:

$$\frac{1-a}{3-a^2}=\frac{1}{23}(4-6a+5a^2)\ ;$$

quindi:

$$P_n=\frac{1}{23}\Sigma(4-6a+5a^2)a^n\ ;$$

e da ultimo, prendendo la somma, si avrà:

$$P_n=\frac{1}{23}(4s_n-6s_{n+1}+5s_{n+2})\ :$$

formola in cui s_r dinota la somma delle potenze r^{me} delle radici dell' equazione $x^3+x^2-1=0$. Se si calcolano i valori di s_r per $r=0, 1, 2,$ etc: si trova:

$$s_0=3\ ,\ s_1=-1\ ,\ s_2=\ \ 1\ ,\ s_3=2\ ,\ s_4=-3$$
$$s_5=4\ ,\ s_6=-2\ ,\ s_7=-1\ ,\ s_8=5\ ,\ s_9=-7\ ,\ \text{etc:}$$

In virtù di questi valori si ottiene:

$$P_0=1\ ,\ P_1=0\ ,\ P_2=-1\ ,\ P_3=2\ ,\ P_4=-2$$
$$P_5=1\ ,\ P_6=1\ ,\ P_7=-3\ ,\ P_8=4\ ,\ P_9=-3\ ,\ \text{etc:}$$

e si ha perciò:

$$\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}=1+0.x-x^2+2x^3-2x^4+x^5+x^6-3x^7+4x^8+\ \text{etc.}$$

La quistione adunque è completamente risoluta; ma frattanto nel numero 130 del libro del signor Catalan si legge quanto segue: « Dans « l'exemple I $\left(\text{che riguarda lo sviluppo di } \frac{1+x}{6-5x+x^2}\right)$ il a été facile de « determiner le terme général du développement de la fraction, parce « que l'on connaissait, *sous forme finie* les facteurs du dénominateur. « Mais, si l'on se proposait d'assigner le terme général de la suite 1, « 0, —1, 2, —2, 3, —5, 7, —10, 15, on serait ramené à la résolution « de l'équation irreductible $x^3-x-1=0$. *La question peut donc être re-* « *gardée comme a peu près insoluble* ».

Così, secondo questa conchiusione, sarebbe generalmente impossibile di esprimere il termine generale dello sviluppo in serie di una funzione

fratta razionale, allorchè i fattori lineari del suo denominatore non si possono esprimere sotto forma finita; cosa che non è affatto vera. Ora è appunto contro questa proposizione, così recisamente affermata, che intendiamo di prevenire i giovani studiosi; e, giova di ripeterlo, per noi non è dubbio che il concetto dell'Autore sia stato travisato da dissesti di stampa, da lui non avvertiti, come lo provano altri errori, che si riscontrano nello stesso luogo. In effetti in una nota a piè della pag. 77, che ha il suo richiamo dopo le parole, poc'anzi citate ... *a peu près insoluble*, si legge: « Cependant, si l'on appelle a, b, c les trois racine de « l'équation $x^3-x-1=0$, on trouve, par un calcul que nous suppri- « mons:

$$P_n=\frac{1-a}{3+2a}a^n+\frac{1-b}{3+2b}b^n+\frac{1-c}{3+2c}c^n.$$

Questa espressione, sotto forma più concisa, equivale a:

$$P_n=\Sigma\frac{1-a}{3+2a}a^n;$$

ma possiamo subito riconoscere la sua inesattezza, perchè, dinotando a una radice dell'equazione $1+x-x^3=0$, pe' numeri 32 e 33 dev'essere invece:

$$P_n=\Sigma-\frac{1+a-a^2}{1-3a^2}a^{-(n+1)}$$

od ancora:

$$P_n=\Sigma-\frac{1+a-a^2}{a-3a^3}a^{-n};$$

e siccome $1+a-a^3=0$, e quindi $1+a=a^3$, se nel numeratore del fattore frazionario si ponga a^3 in luogo di $1+a$, si avrà sotto forma più semplice:

$$P_n=\Sigma\frac{a-a^2}{1-3a^2}a^{-n};$$

espressione la quale non può coincidere con quella data del sig. Catalan.

Nè questo è tutto. Col principio delle serie ricorrenti il signor Catalan calcola alcuni dei primi termini dello sviluppo della frazione proposta, e trova:

$$\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}=1-x^2+2x^3-2x^4+3x^5-5x^6+7x^7-10x^8+\text{ etc.};$$

ma non si ha che a confrontare questo sviluppo con quello da noi dato

più sopra, per riconoscerlo erroneo, coincidendo essi solo fino al termine affetto dalla potenza x^4. Qui però l'errore è cagionato da inavvertenza, dappoichè essendo il denominatore della data frazione di 3° grado, per la teoria delle serie ricorrenti bisognà calcolare direttamente i primi tre termini dello sviluppo; e, mentre questi tre termini sono $1, 0.x, -x^2$, il signor Catalan prende invece $1, -x^2, 2x^3$; e quindi lo sviluppo dovea naturalmente risultare inesatto.

Esempio V.

42. In questo esempio prenderemo a considerare la frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)}=\frac{1}{(\mu_0+2\mu_1 x+\mu_2 x^2)^\alpha}=\frac{1}{X^\alpha}\ ;$$

ma vogliamo prima esaminare il caso di $\alpha=2$. In questa ipotesi, dinotata con a una radice dell'equazione $X=0$, si ha (n^i 19 e 28):

$$Q_n=\Sigma\left(\frac{n}{\theta}-\frac{\theta'}{\theta^2}a\right)a^{n-1}=\Sigma V a^{n-1}$$

avendo messo:

$$V=\frac{n}{\theta}-\frac{\theta'}{\theta^2}a\ .$$

Ora, per determinare θ o θ', nella funzione $\mu(x)$ muteremo subito la x in $a+t$ (n° 21); allora, essendo $\mu_0+2\mu_1 a+\mu_2 a^2=0$, si avrà dapprima:

$$\mu(a+t)=t^2\left\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\right\}^2\ ;$$

ed in seguito:

$$\theta(a+t)=\left\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\right\}^2\ .$$

Indi, sviluppando il quadrato, si ottiene:

$$\theta=4(\mu_1+\mu_2 a)^2 \quad , \quad \theta'=4\mu_2(\mu_1+\mu_2 a)\ ;$$

e si ha perciò:

$$V=\frac{1}{4}\left[n\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^2}-\mu_2 a\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^3}\right]\ .$$

Resta a trasformare la V in funzione intera di a; il che si riduce a tra-

sformare la 2ª e 3ª potenza della frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$; e così (V. il 1° esempio, e la nota 1) risulta:

$$V=\frac{1}{4M^2}\left(Mn-\mu_0(\mu_1 a+\mu_2 a^2)\right).$$

Avremo adunque:

$$Q_n=\frac{1}{4M^2}\Sigma\left[Mn-\mu_0(\mu_1 a+\mu_2 a^2)\right]a^{n-2};$$

ed in fine, prendendo la somma, verrà:

$$Q_n=\frac{1}{4M^2}\left[Mns_{n-2}-\mu_0(\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n-1})\right].$$

Questa formola contiene le tre somme s_{n-2}, s_n, s_{n-1}; ma atante la relazione:

$$\mu_0 s_{n-2}+2\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n-1}=0,$$

che ha luogo tra esse ed i coefficienti dell'equazione X=0, potrà ridursi a contenerne solamente due. Se si elimina s_{n-1}, si avrebbe la formola che si sarebbe trovata direttamente riducendo la funzione V al 1° grado.

Per lo sviluppo ascendente si farebbe capo dalla formola:

$$P_n=\Sigma\left(\frac{n+1}{\theta}+\frac{\theta'}{\theta^2}a\right)a^{-(n+2)};$$

e si troverebbe:

$$P_n=\frac{1}{4M^2}\left[M(n+1)s_{-(n+2)}+\mu_0(\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n})\right].$$

Anche questa formola può ridursi a contenere due delle tre somme, tenendo presente la relazione:

$$\mu_0 s_{-(n+2)}+2\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n}=0.$$

43. Il metodo tenuto per $\alpha=2$ si estende ad α qualunque; ma pel caso generale preferiamo di far dipendere la ricerca dal teorema del

n° 11. Secondo questo teorema l'elemento $Q_{n,\alpha}$ di Q_n coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo di:

$$\frac{(a+t)^n}{\theta(a+t)}\,;$$

ma si ha per le formole precedenti:

$$\theta(a+t)=\left\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\right\}^{\alpha}\,;$$

adunque il valore di $Q_{n,\alpha}$ sarà uguale al coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo del prodotto

$$\left\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\right\}^{-\alpha}(a+t)^n\,;$$

e perciò, se si ponga:

$$V=\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(n)_{\alpha-1}(-\alpha)_0}{(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha}}+\frac{(n)_{\alpha-2}(-\alpha)_1\mu_2 a}{2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+1}}+\frac{(n)_{\alpha-3}(-\alpha)_2(\mu_2 a)^2}{2^2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+2}}+\ldots+\frac{(n)_0(-\alpha)_{\alpha-1}(\mu_2 a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(\mu_1+\mu_2 a)^{2\alpha-1}}\right],$$

si avrà:

$$Q_{n,\alpha}=Va^{n-\alpha+1}\,;$$

da che poi segue:

$$Q_n=\sum Va^{n-\alpha+1}\,;$$

la somma dovendo estendersi alle radici dell'equazione

$$\mu_0+2\mu_1 a+\mu_2 a^2=0\,.$$

Per compiere la ricerca non resta che a prendere la somma; e per ciò bisogna trasformare la V in funzione intera di a; ma, ridotta la quistione a questo punto, quello che rimane è puramente affare di scrittura, perchè la V è un aggregato di frazioni, che hanno per denominatori potenze di $\mu_1+\mu_2 a$; e sono già conosciute le funzioni intere equivalenti a tutte le potenze della frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$ (nota I).

In quanto alla espressione di P_n si partirebbe dal principio che l'elemento $P_{n,\alpha}$ coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo della frazione:

$$-\frac{(a+t)^{-(n+1)}}{\theta(a+t)}$$

e perciò nello sviluppo del prodotto:

$$-\left(2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\right)^{-\alpha}(a+t)^{-(n+1)}\,;$$

laonde, posto:

$$U=$$

$$\frac{1}{2^\alpha}\left[\frac{(-n-1)_{\alpha-1}(-\alpha)_0}{(\mu_1+\mu_2 a)^\alpha}+\frac{(-n-1)_{\alpha-2}(-\alpha)_1\mu_2 a}{2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+1}}+\frac{(-n-1)_{\alpha-3}(-\alpha)_2(\mu_2 a)^2}{2^2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+2}}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(-n-1)_0(-\alpha)_{\alpha-1}(\mu_2 a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(\mu_1+\mu_2 a)^{2\alpha-1}}\right],$$

si ha:

$$P_{n,\alpha}=-Ua^{-(n+\alpha)};$$

ed in seguito:

$$P_n=-\Sigma Ua^{-(n+\alpha)};$$

la somma dovendo sempre estendersi alle radici dell'equazione

$$\mu_0+\mu_1 a+\mu_2 a^2=0 .$$

Per compiere poi la ricerca si procederà interamente, come a riguardo di Q_n.

Per concretare questa soluzione con un caso particolare supporremo $\alpha=3$. In questa ipotesi le espressioni di V ed U divengono:

$$V=\frac{1}{2^3}\left[n(n-1)\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^3}-3n\mu_2 a\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^4}+3\mu_2^2 a^2\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^5}\right],$$

$$U=\frac{1}{2^3}\left[(n+1)(n+2)\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^3}+3(n+1)\mu_2 a\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^4}+3\mu_2^2 a^2\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^5}\right];$$

e quindi essendo:

$$Q_n=\Sigma Va^{n-2}\qquad,\qquad P_n=-\Sigma Ua^{-(n+3)};$$

mutando le frazioni nelle equivalenti funzioni intere, e poi prendendo le somme, risultano le due formole

$$Q_n=\frac{1}{2^3 M^3}\left[n(n-1)(\mu_1 s_{n-2}+\mu_2 s_{n-1})-3n\mu_2 s_{n-1}+\frac{3}{M}\mu_2^2(\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1})\right];$$

$$P_n=\frac{-1}{2^3 M^3}\left[(n+1)(n+2)(\mu_1 s_{-(n+3)}+\mu_2 s_{-(n+2)})+3(n+1)\mu_2 s_{-(n+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{M}\mu_2^2(\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n})\right].$$

Ciascuna di queste formole contiene quattro somme di potenze di ra-

dici; ma sì l'una che l'altra può ridursi a contenerne solamente due; perchè, sussistendo le due coppie di relazioni:

$$\mu_0 s_{n-2}+2\mu_1 s_{n-1}+\mu_2 s_n=0 \quad , \quad \mu_0 s_{n-1}+2\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1}=0 \,,$$

e

$$\mu_0 s_{-(n+3)}+2\mu_1 s_{-(n+2)}+\mu_2 s_{-(n+1)}=0 \quad , \quad \mu_0 s_{-(n+2)}+2\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n}=0 \,,$$

si possono da ciascuna eliminar due somme. Se si eliminano dalla prima s_{n+1} ed s_n, e dalla seconda $s_{-(n+1)}$ ed s_{-n}, si perverrebbe alle formole che si sarebbero trovate direttamente, se le funzioni V ed U, oltre a trasformarsi in funzioni intere di a, si fossero ancora ridotte al 1° grado.

44. L'esempio del quale ci siamo occupati comprende come caso particolare lo sviluppo della frazione (*):

$$\frac{1}{(1-2x\cos\omega+x^2)^2} \,,$$

per la quale si ha $\mu_0=\mu_2=1$, $\mu_1=-\cos\omega$, $s_i=s_{-i}=2\cos i\omega$, ed $M=-\text{sen}^2\omega$. Quando $\alpha=2$, per la sola condizione di $\mu_0=\mu_2=1$, le espressioni di Q_n e P_n divengono:

$$Q_n=\frac{1}{4M^2}\left[n s_{n-1}-\frac{1}{M}(s_{n+1}+\mu_1 s_n)\right] \quad , \quad P_n=\frac{1}{4M}\left[(n+1)s_n+\frac{1}{M}(s_n+\mu_1 s_{n+1})\right]$$

ma quindi tenendo conto delle altre condizioni, ed osservando che

$$s_{n+1}+\mu_1 s_n=2\left\{\cos(n+1)\omega-\cos\omega\cos n\omega\right\}=-2\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,n\omega \,,$$

$$s_n+\mu_1 s_{n+1}=2\left\{\cos n\omega-\cos\omega\cos(n+1)\omega\right\}=\ 2\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}(n+1)\omega \,,$$

si ottengono le formole semplicissime:

$$Q_n=\frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}\,n\omega}{\text{sen}^3\omega}-n\frac{\cos(n-1)\omega}{\text{sen}^2\omega}\right] \,,\quad P_n=\frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(n+1)\omega}{\text{sen}^3\omega}-(n+1)\frac{\cos(n+1)\omega}{\text{sen}^2\omega}\right]$$

(*) Intorno allo sviluppo di questa frazione vedi la nota XI del Trattato della risoluzione delle equazioni numeriche di Lagrange; ed il n° 1120 del Trattato di calcolo differenziale ed integrale di Lacroix, vol. 3°. Aggiungiamo a tal riguardo che col metodo di Lagrange non è possibile di ottenere l'espressione di P_n nella forma così compatta come risulta dal nostro procedimento; ed anche nel caso più semplice di $\alpha=2$ non si vede facilmente come l'espressione data da Lagrange si riduca a quella da noi data qui sopra.

Nel caso di $a=3$ si ha dapprima:

$$Q_n=\frac{1}{2^4M^3}\left[n(n-1)(s_{n-2}+\mu_1 s_{n-3})-3ns_{n-1}+\frac{3}{M}(s_{n+1}+\mu_1 s_n)\right];$$

$$P_n=\frac{-1}{2^4M^3}\left[(n+1)(n+2)(s_{n+2}+\mu_1 s_{n+3})+3(n+1)s_{n+2}+\frac{3}{M}(s_n+\mu_1 s_{n+1})\right];$$

e siccome:

$$s_{n-2}+\mu_1 s_{n-3}=2[\cos(n-1)\omega-\text{ces}\,\omega\cos(n-2)\omega]=-2\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}(n-2)\omega$$

$$s_{n+1}+\mu_1 s_n\;=2[\cos(n+1)\omega-\cos\omega\cos n\omega\qquad]=-2\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,n\omega$$

$$s_{n+2}+\mu_1 s_{n+3}=2[\cos(n+2)\omega-\text{ces}\,\omega\cos(n+3)\omega]=\;\;2\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}(n+3)\omega$$

$$s_n\;+\mu_1 s_{n+1}=2[\text{ces}\,n\omega\qquad-\text{ces}\,\omega\,\text{ces}(n+1)\omega]=\;\;2\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}(n+1)\omega$$

così risultano le formole:

$$Q_n=\frac{1}{2^3}\left\{3\frac{\text{sen}\,n\omega}{\text{sen}^5\omega}-3n\frac{\cos(n-1)\omega}{\text{sen}^4\omega}-n(n-1)\frac{\text{sen}(n-2)\omega}{\text{sen}^3\omega}\right\};$$

$$P_n=\frac{1}{2^3}\left\{3\frac{\text{sen}(n+1)\omega}{\text{sen}^5\omega}-3(n+1)\frac{\cos(n+2)\omega}{\text{sen}^4\omega}-(n+1)(n+2)\frac{\text{sen}(n+3)\omega}{\text{sen}^3\omega}\right\}.$$

V

Altra soluzione della quistione.

45. Procedendo co' metodi esposti alla ricerca delle funzioni Q_n e P_n abbiamo potuto definire completamente la loro forma in termini delle somme delle potenze simili delle radici di una o più equazioni, vale a dire o della sola equazione $\mu(x)=0$, o delle equazioni in cui questa per avventura si può decomporre. Ma, le forme una volta conosciute, si comprende che debba essere possibile di determinare le stesse funzioni col principio de' coefficienti indeterminati, indipendentemente dalle trasformazioni che ci guidarono a scovrire le loro forme; ed è per tal via che si perviene ad un altro metodo estremamente semplice per risolvere la proposta quistione.

Limitandoci a considerare lo sviluppo di $\frac{1}{\mu(x)}$, porremo, come al n° 2

$$\mu(x)=\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\ldots+\mu_m x^m;$$

e per chiarezza distingueremo tre casi, secondochè l'equazione $\mu(x)=0$ ha disuguali le radici; o le ha tutte multiple di uno stesso grado; o ha diverse classi di radici multiple.

Sviluppo discendente

46. Caso I. *L'equazione $\mu(x)=0$ ha disuguali le radici.* In questo caso per la formola (28) sarà:

$$q_n=A^0 s_n+A' s_{n+1}+A'' s_{n+2}+\ldots+A^{(m-1)} s_{n+m-1}, \tag{34}$$

dove le somme s_r si rapportano alle radici di $\mu(x)=0$, mentre i coefficienti $A^0, A', \ldots, A^{(m-1)}$ sono delle costanti, indipendenti cioè da n. Così la ricerca di q_n si riduce appunto a determinare queste m costanti; ed è chiaro che perciò basta conoscere i valori di q_n corrispondenti ad m valori di n. Ma trattandosi dello sviluppo discendente di $\frac{1}{\mu(x)}$ si ha $q_0=q_1=q_2=\ldots=q_{m-2}=0$ (n° 5); ed è inoltre $q_{m-1}=\frac{1}{\mu_m}$ (n° 2); adunque la formola (34), ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, \ldots, m-1$, conduce al seguente sistema di m equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
0 &= A^0 s_0+A' s_1+A'' s_2+\ldots+A^{(m-1)} s_{m-1}\\
0 &= A^0 s_1+A' s_2+A'' s_3+\ldots+A^{(m-1)} s_m\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= A^0 s_{m-2}+A' s_{m-1}+A'' s_m+\ldots+A^{(m-1)} s_{2m-3}\\
\frac{1}{\mu_m} &= A^0 s_{m-1}+A' s_m+A'' s_{m+1}+\ldots+A^{(m-1)} s_{2m-2}
\end{aligned}$$

per mezzo delle quali restano definiti i valori delle m costanti. Intanto dovendo queste equazioni coesistere con la (34), posto per compendio:

$$M=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & s_{m-1}\\ s_1 & s_2 & \cdot & s_m\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{m-1} & s_m & \cdot & s_{2m-2}\end{vmatrix}$$

si perviene alla formola:

$$q_n = \frac{1}{\mu_m M} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdot & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-2} & s_{m-1} & \cdot & s_{2m-3} \\ s_n & s_{n-1} & \cdot & s_{n-m-1} \end{vmatrix}$$

la quale determina il valore di q_n senza bisogno di alcuna trasformazione; ed in tal modo la quistione sembra ridotta a quel grado maggiore di semplicità di cui poteva essere suscettibile.

47. Rimanendo tuttavia disuguali le radici dell'equazione $\mu(x)=0$, se la funzione $\mu(x)$ sia un prodotto di più fattori razionali $X_a, X_b, \dots, X_l$, la ricerca di q_n potrà farsi dipendere da quella delle sue componenti $W_a, W_b, \dots, W_l$, le quali si determineranno con lo stesso metodo tenuto qui sopra. In fatti indicando, come per lo innanzi $a', b', \dots, l'$ i gradi di $X_a, X_b, \dots, X_l$, le espressioni delle componenti saranno della forma (n° 27):

$$W_a = A^0 s_n^{(a)} + A' s_{n-1}^{(a)} + \dots + A^{(a'-1)} s_{n-a'-1}^{(a)}$$

$$W_b = B^0 s_n^{(b)} + B' s_{n-1}^{(b)} + \dots + B^{(b'-1)} s_{n-b'-1}^{(b)}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$W_l = L^0 s_n^{(l)} + L' s_{n-1}^{(l)} + \dots + L^{(l'-1)} s_{n-l'-1}^{(l)}$$

dove i sistemi di coefficienti sono delle costanti indipendenti da n, e la quistione si riduce a determinare i loro valori. Ora queste costanti sono al numero di $a'+b'+\dots+l'=m$; e si ha d'altra parte:

$$q_n = W_a + W_b + \dots + W_l\,;$$

e perciò, siccome sono nulli i valori di q_n corrispondenti ad $n=0, 1, 2, \dots, m-2$, e si ha $q_{m-1} = \frac{1}{\mu_m}$, si vede che i valori delle costanti si determinano precisamente come nel caso precedente.

48. Supponiamo per esempio:

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{X_a X_b} = \frac{1}{(1-x+x^2)(1+x^4)}\,.$$

In questo caso le componenti di q_n saranno due W_a, W_b, l'una corrispon-

dente al fattore $X_a = 1 - x + x^2$, l'altra ad $X_b = 1 + x^4$; ed essendo $a' = 2$ e $b' = 4$, si avrà:

$$W_a = A^\circ s_n^{(a)} + A' s_{n-1}^{(a)}$$

$$W_b = B^\circ s_n^{(b)} + B' s_{n-1}^{(b)} + B'' s_{n-2}^{(b)} + B''' s_{n-3}^{(b)}$$

Dopo ciò, dovendo essere $q_n = W_a + W_b$, sarà:

$$(35) \qquad q_n = A^\circ s_n^{(a)} + A' s_{n-1}^{(a)} + B^\circ s_n^{(b)} + B' s_{n-1}^{(b)} + B'' s_{n-2}^{(b)} + B''' s_{n-3}^{(b)}\,;$$

e più non resta che determinare le sei costanti A°, A', B°, B', B'', B'''. A tal'effetto si daranno ad n i valori successivi 0, 1, 2, 3, 4, 5, pe' quali $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$ e $q_5 = 1$; ed in tal modo si otterranno sei equazioni, che danno i valori delle costanti.

Ma ora, per la natura dell'esempio, è anche facile di avere i valori numerici di $s_r^{(a)}$, $s_r^{(b)}$ per qualsivoglia valore di r; il che deriva da ciò che X_a ed X_b sono i fattori irriduttibili de' binomii $1 - x^6$, $1 - x^8$, e quindi le funzioni $s_r^{(a)}$, $s_r^{(b)}$ esprimono rispettivamente le somme delle potenze r^{esime} delle radici primitive delle equazioni binomie $1 - x^6 = 0$, $1 - x^8 = 0$. Per tanto segue dalla teoria di queste funzioni, da noi esposta in altra occasione:

I. Che la somma $s_r^{(a)}$ non ha che quattro valori distinti, cioè:

$s_r^{(a)} = 2$, se r è divisibile per 6

$s_r^{(a)} = -2$, se r è divisibile per 3, senza esserlo per 2

$s_r^{(a)} = -1$, se r è divisibile per 2, senza esserlo per 3

$s_r^{(a)} = 1$, se r è primo con 6.

II. E che tre sono i valori distinti di $s_r^{(b)}$, cioè:

$s_r^{(b)} = 4$, se r è divisibile per 8

$s_r^{(b)} = -4$, se r è divisibile per 4, senza esserlo per 8

$s_r^{(b)} = 0$, se r non è divisibile per 4.

È chiaro che in tal guisa sono perfettamente determinati i valori numerici di $s_r^{(a)}$ ed $s_r^{(b)}$, qualunque sia il valore di r; ed è così che si avrebbe:

$$s_0^{(a)}=2\,,\ s_1^{(a)}=1\,,\ s_2^{(a)}=-1\,,\ s_3^{(a)}=-2\,,\ s_4^{(a)}=-1\,,\ s_5^{(a)}=1\,,\ \text{etc. etc.}$$

$$s_0^{(b)}=4\,,\ s_1^{(b)}=0\,,\ s_2^{(b)}=0\,,\ s_3^{(b)}=0\,,\ s_4^{(b)}=-4\,,\ \text{etc: etc:}$$

Dopo queste considerazioni la formola (35), ponendovi successivamente $n=0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5$, condurrà subito al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
0&=\ \ 2A^0+\ A'+4B^0\\
0&=\ \ \ A^0-\ A'-4B'''\\
0&=-\ A^0-2A'-4B''\\
0&=-2A^0-\ A'-4B'\\
0&=-\ A^0+\ A'-4B^0\\
1&=\ \ \ A^0+2A'+4B'''
\end{aligned}$$

dalle quali si ricava immediatamente:

$$A^0=\frac{2}{3}\,,\ A'=-\frac{1}{3}\,,\ B^0=-\frac{1}{4}\,,\ B'=-\frac{1}{4}\,,\ B''=0\,,\ B'''=\frac{1}{4}$$

e si avrà in conseguenza:

$$q_n=\frac{1}{3}\left(2s_n^{(a)}-s_{n+1}^{(a)}\right)-\frac{1}{4}\left(s_n^{(b)}+s_{n+1}^{(b)}-s_{n+3}^{(b)}\right). \tag{36}$$

Cercando per esempio il millesimo termine dello sviluppo, vale a dire il valore di q_{999}, sarà:

$$q_{999}=\frac{1}{3}\left(2s_{999}^{(a)}-s_{1000}^{(a)}\right)-\frac{1}{4}\left(s_{999}^{(b)}+s_{1000}^{(b)}-s_{1002}^{(b)}\right):$$

ma $s_{999}^{(a)}=-2\,,\ s_{1000}^{(a)}=-1\,,\ s_{999}^{(b)}=0\,,\ s_{1000}^{(b)}=4\,,\ s_{1002}^{(b)}=0$; dunque

$$q_{999}=\frac{1}{3}\left(-4+1\right)-\frac{1}{4}\cdot 4$$

ossia

$$q_{999}=-2\,.$$

49. Caso II. *Le radici di $\mu(x)=0$ sono tutte multiple di grado α.* In questa ipotesi $\mu(x)$ è della forma X_α^α, e si avrà (n° 28):

$$q_n = A_n^0 s_n + A_n' s_{n-1} + \ldots + A_n^{(\alpha'-1)} s_{n-\alpha'+1}\,;$$

le somme s_r rapportandosi alle radici di $X_\alpha=0$, ed α' dinotando il grado di X_α, di guisa che $m=\alpha\alpha'$. Attualmente tutte le quantità $A_n^{(r)}$ sono funzioni intere di n di grado $\alpha-1$, (n° 27) sicchè l'espressione di ciascuna è della forma:

$$A_n^{(r)} = a_{0,r} + a_{1,r} n + a_{2,r} n^2 + \ldots + a_{\alpha-1,r} n^{\alpha-1}\,,$$

dove gli α coefficienti $a_{0,r}$, $a_{1,r}$, ..., $a_{\alpha-1,r}$ sono costanti indipendenti da n. Adunque il numero delle costanti contenute nella espressione di q_n risulta uguale ad $\alpha\alpha'$, vale a dire uguale ad m, grado di $\mu(x)$, e le m equazioni lineari, che le determinano, si otterranno ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, \ldots, m-1$, e tenendo presente che $q_0=0$, $q_1=0$, ..., $q_{m-2}=0$, $q_{m-1}=\dfrac{1}{\mu_m}$.

50. Supponiamo per esempio che si tratti di sviluppare $\dfrac{1}{(x^3+x^2-1)^2}$, per cui $\mu(x)=X_2^2=(x^3+x^2-1)^2$, $\mu_m=1$, $\alpha'=3$, $\alpha=2$, $m=\alpha\alpha'=6$. Ed essendo $\alpha'=3$, si ha dapprima:

$$q_n = A_n^0 s_n + A_n' s_{n-1} + A_n'' s_{n-2}\,.$$

Inoltre, essendo $\alpha=2$, A_n^0, A_n', A_n'' saranno funzioni lineari di n, e si potrà supporre:

$$q_n = (a+bn)s_n + (c+dn)s_{n-1} + (e+fn)s_{n-2}\,.$$

Per determinare le sei costanti a, b, c, d, e, f si daranno ad n i valori successivi $0, 1, 2, 3, 4, 5$, e siccome $s_0=3$, $s_1=-1$, $s_2=1$, $s_3=2$, $s_4=-3$, $s_5=4$, $s_6=-2$, $s_7=-1$, si otterranno le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
0 &= 3a - c + e\\
0 &= -(a+b) + (c+d) + 2(e+f)\\
0 &= (a+2b) + 2(c+2d) - 3(e+2f)\\
0 &= 2(a+3b) - 3(c+3d) + 4(e+3f)\\
0 &= -3(a+4b) + 4(c+4d) - 2(e+4f)\\
1 &= 4(a+5b) - 2(c+5d) - (e+5f)\,.
\end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni si trova:

$$23^2 a = -52 \quad , \quad 23b = 2$$

$$23^2 c = -106 \quad , \quad 23d = 2$$

$$23^2 e = 50 \quad , \quad 23f = -1$$

e quindi risulta:

$$q_n = \frac{n}{23}\left(2s_n + 2s_{n-1} - s_{n-2}\right) - \frac{2}{23^2}\left(26s_n + 53s_{n-1} - 25s_{n-2}\right) .$$

51. Caso III. *L'equazione $\mu(x)=0$ ha diverse classi di radici multiple.* La funzione $\mu(x)$ sarà generalmente della forma $X_a^\alpha X_b^\beta \dots X_c^\gamma$; e però, supposto che $W_a, W_b, \dots, W_c$ siano le componenti di q_n relative ai fattori $X_a^\alpha, X_b^\beta, \dots, X_c^\gamma$, si avrà:

$$q_n = W_a + W_b + \dots + W_c \tag{37}$$

ed inoltre:

$$W_a = A_n^{0} s_n^{(a)} + A'_n s_{n-1}^{(a)} + \dots + A_n^{(\alpha'-1)} s_{n-\alpha'-1}$$

$$W_b = B_n^{(b)} s_n^{(b)} + B'_n s_{n-1}^{(b)} + \dots + B_n^{(b'-1)} s_{n-b'-1}^{(b)}$$

etc: etc: etc:

$A_n^{(r)}$, $B_n^{(r)}$, etc. essendo funzioni intere di n di grado $\alpha-1$, e quindi della forma

$$A_n^{(r)} = a_{0,r} + a_{1,r} n + a_{2,r} n^2 + \dots + a_{\alpha-1,r} n^{\alpha-1}$$

$$B_n^{(r)} = b_{0,r} + b_{1,r} n + b_{2,r} n^2 + \dots + b_{\beta-1,r} n^{\beta-1}$$

etc: etc: etc:

dove i coefficienti $a_{i,r}$, $b_{i,r}$, etc: sono costanti, che più non dipendono da n. Osserviamo che le costanti contenute nelle espressioni di W_a, W_b, etc. sono rispettivamente in numero di $\alpha a'$, $\beta b'$, etc.; ma questi numeri indicano per ordine i gradi di X_a^α, X_b^β, etc.; dunque il numero totale delle costanti contenute nella espressione di q_n sarà, come ne' casi precedenti, uguale ad m, grado di $\mu(x)$; e perciò i loro valori si otterranno dalla formola (37) ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, \dots, m-1$, e tenendo presente che $q_0=0$, $q_1=0, \dots, q_{m-2}=0$, $q_{m-1}=\frac{1}{\mu_m}$.

Sviluppo ascendente

52. Procedimenti analoghi si possono stabilire per lo sviluppo ascendente di $\frac{1}{\mu(x)}$; ma sicoome i primi m termini non sarebbero immediatamente conosciuti, eviteremo questo ostacolo facendo dipendere il detto sviluppo da quello di $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$ (n° 5), pel quale tornano ad osser nulli i primi $m-1$ termini, ed il termine m^{esimo} ha per coefficiente $\frac{1}{\mu_0}$. D'altra parte è già osservato che questi due sviluppi si deducono subito l'uno dall'altro, in guisa ohe chiamando p_n e p'_n i coefficienti di x^n nel primo e nel secondo sviluppo, si ha:

$$p_n = p'_{n+m-1}.$$

Adunque, invece di p_n coefficiente di x^n nello sviluppo ascondente di $\frac{1}{\mu(x)}$, cercheremo p'_n coefficiente di x^n nello sviluppo somigliante di $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$. Ma, così essendo, è facile di vedere che tutto ciò che si è detto per la ricerca di q_n si applica parola a parola a quella di p'_n, col solo divario di doversi mutare μ_m in μ_0, e cangiarsi il segno agl'indici delle s, come seguo dalle formole stabilite ne'numeri da 30 a 33. Intanto, per evitare gl'indici negativi, converremo di rappresentare con σ_r la somma delle potenze positive di grado r delle inverse delle radici di quelle medesime equazioni, cui si rapportano le somme s_r, di guisa che si avrà generalmente:

$$\sigma_r = s_{-r};$$

ed allora ecco i risultamenti che si ottengono nella presente ipotesi.

53. Caso I. *L'equazione $\mu(x)=0$ non ha radici multiple.* Dinotando σ_r la somma delle potenze di grado r delle radici di $\mu\left(\frac{1}{x}\right)=0$, sarà:

$$p'_n = A^0\sigma_n + A'\sigma_{n+1} + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{n+m-1};$$

e le m costanti $A^0, A', \ldots, A^{(m-1)}$ saranno definite dalle m equazioni:

$$
\begin{aligned}
0 &= A^0\sigma_0 + A'\sigma_1 + A''\sigma_2 + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{m-1} \\
0 &= A^0\sigma_1 + A'\sigma_2 + A''\sigma_3 + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= A^0\sigma_{m-2} + A'\sigma_{m-1} + A''\sigma_m + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{2m-3} \\
\frac{1}{\mu_m} &= A^0\sigma_{m-1} + A'\sigma_m + A''\sigma_{m+1} + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{2m-2}.
\end{aligned}
$$

Che, se pongasi

$$
N = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdot & \sigma_{m-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdot & \sigma_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m-1} & \sigma_m & \cdot & \sigma_{2m-2} \end{vmatrix}
$$

si avrà esplicitamente:

$$
p'_n = \frac{1}{\mu_m N} \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdot & \sigma_{m-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdot & \sigma_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m-2} & \sigma_{m-1} & \cdot & \sigma_{2m-3} \\ \sigma_n & \sigma_{n+1} & \cdot & \sigma_{n+m-1} \end{vmatrix}
$$

E quindi, volendo l'espressione di p_n, non si avrà che a mutare in questa formola la n in $n+m-1$; da che risulta:

$$
p_n = \frac{1}{\mu_m N} \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdot & \sigma_{m-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdot & \sigma_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m-2} & \sigma_{m-1} & \cdot & \sigma_{2m-3} \\ \sigma_{n+m-1} & \sigma_{n+m} & \cdot & \sigma_{n+2m-2} \end{vmatrix}
$$

Supponiamo per esempio che si tratti dello sviluppo di $\frac{1}{1+x-x^3}$; ed essendo $\mu_0=1$, $m=3$, si avrà:

$$p_n=\frac{1}{N}\begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \sigma_{n-4} \end{vmatrix}, \quad N=\begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{vmatrix}$$

Qui la somma σ_r si rapporta alle radici dell'equazione $x^3+x^2-1=0$; per cui (nº 50) $\sigma_0=3$, $\sigma_1=-1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=2$, $\sigma_4=-3$; e quindi sostituendo e calcolando i determinanti, verrà $N=-23$, e

$$p_n=\frac{1}{23}\left(3\sigma_{n-2}+7\sigma_{n-3}-2\sigma_{n-4}\right).$$

54. Gioverà di osservare che, se la funzione $\mu(x)$ è di forma reciproca, nelle formole precedenti sarà lecito di cangiare il simbolo σ in s, perchè allora $\sigma_r=s_{-r}=s_r$. Così in questa ipotesi la quantità figurata da N equivale a quella che nel nº 46 fu dinotata con M; ma si ha di più $\mu_0=\mu_m$; dunque sarà pure $q_n=q'_n$; e perciò: *quando la funzione $\mu(x)$ è di forma reciproca il coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente di* $\frac{1}{\mu(x)}$ coincide col *coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente di* $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$; ma ciò del resto risulta immediatamente a priori da ciò che si è detto nel nº 5.

55. Se la funzione $\mu(x)$ sia della forma $X_a, X_b, \dots, X_l$, la ricerca di p'_n si farà dipendere, come nel nº 47, dalle componenti $W_a, W_b, \dots, W_l$, le di cui espressioni sono ciò che divengono quelle ivi riportate, mutandovi il simbolo s in σ. E siccome le costanti, che vi si contengono, sono al numero di $a'+b'+\dots+l'=m$, e si ha d'altra parte:

$$p'_n=W_a+W_b+\dots+W_l,$$

è evidente che queste costanti si determinano precisamente con lo stesso metodo allora indicato.

Supponiamo per esempio che si tratti dello sviluppo ascendente della medesima frazione considerata nel detto nº 48, $\frac{1}{(1-x+x^2)(1+x^2)}$. L'espressione di p'_n si otterrebbe dal secondo membro della formola (36),

cangiandovi solo il simbolo s in σ; ma poichè le funzioni $X_a = 1 - x + x^2$ ed $X_b = 1 + x^4$ sono entrambe di forma reciproca, si vede che anche questo cangiamento è inutile.

In seguito per avere il valore di p_n basterà mutare nella formola istessa la n in $n+m-1$; $=n+5$; e così si avrà:

$$p_n = \frac{1}{3}\left(2s'^{(a)}_{n+5} - s'^{(a)}_{n+6}\right) - \frac{1}{4}\left(s'^{(b)}_{n+5} + s'^{(b)}_{n+6} - s'^{(b)}_{n+8}\right)$$

Ma essendo:

$$s'^{(a)}_{n+5} = -s'^{(a)}_{n+2} \quad , \quad s'^{(b)}_{n+5} = -s'^{(b)}_{n+1}$$

$$s'^{(a)}_{n+6} = s'^{(a)}_{n} \quad , \quad s'^{(b)}_{n+6} = -s'^{(b)}_{n+2}$$

$$s'^{(b)}_{n+8} = s'^{(b)}_{n} \;,$$

verrà in fine più semplicemente

$$p_n = \frac{1}{4}\left(s'^{(b)}_{n} + s'^{(b)}_{n+1} + s'^{(b)}_{n+2}\right) - \frac{1}{3}\left(s'^{(a)}_{n} + 2s'^{(a)}_{n+2}\right).$$

Se si domanda, per esempio, il millesimo termine dello sviluppo, vale a dire se $n=999$, si avrebbe:

$$p_{999} = \frac{1}{4}\left(s'^{(b)}_{999} + s'^{(b)}_{1000} + s'^{(b)}_{1001}\right) - \frac{1}{3}\left(s'^{(a)}_{999} + 2s'^{(a)}_{1001}\right);$$

e siccome:

$$s'^{(b)}_{999} = 0\,,\quad s'^{(b)}_{1000} = 4\,,\quad s'^{(b)}_{1001} = 0\,,\quad s'^{(a)}_{999} = -2\,,\quad s'^{(a)}_{1001} = 1\,,$$

risulterà:

$$p_{999} = 1\,.$$

56. Caso II. *Le radici di $\mu(x)=0$ sono tutte multiple di grado α.* Valga per questo caso quanto si è detto nel n° 49, purchè si cangi da per tutto q in p', s in σ, e μ_m in μ_0.

Poniamo ad esempio che si tratti dello sviluppo di $\frac{1}{(1+x-x^3)^2}$. Le formole dalle quali deriva il valore di p'_n saranno le medesime del n° 50, salvo il cangiamento di s in σ. Intanto bisogna osservare che ora le somme σ_r si rapportano alle radici dell'equazione $x^3+x^2-1=0$, la stessa cui si rapportavano nel luogo citato le somme s_r; e perciò si ha senza più:

$$p'_n = \frac{1}{23}\left[\left(2n - \frac{52}{23}\right)\sigma_{n+1} + \left(2n - \frac{106}{23}\right)\sigma_{n+2} + \left(n - \frac{50}{23}\right)\sigma_{n+3}\right].$$

Attualmente, se piaccia di avere l'espressione di p_n, non si avrà che

a mutare la n in $n+m-1=n+6-1=n+5$. Per questo cangiamento s'introducono nella formola le tre somme σ_{n+5}, σ_{n+6}, σ_{n+7}, le quali si possono facilmente esprimere in funzione dello somme di grado più basso σ_n, σ_{n+1}, σ_{n+2}; e ciò mercè la relazione $\sigma_r-\sigma_{r+2}-\sigma_{r+3}=0$, la quale ha luogo tra le somme delle potenze simili delle radici dell'equazione $x^3+x^2-1=0$, ed i suoi coefficienti. Per tanto si trova in siffatta guisa:

$$\sigma_{n+5}=\sigma_n-\sigma_{n+1}$$
$$\sigma_{n+6}=\sigma_{n+1}-\sigma_{n+2}$$
$$\sigma_{n+7}=-\sigma_n+2\sigma_{n+2};$$

e così si ottiene:

$$p_n=\frac{1}{23}\left[3\left(n+\frac{81}{23}\right)\sigma_n-\frac{54}{23}\sigma_{n+1}-2\left(2n+\frac{127}{23}\right)\sigma_{n+2}\right].$$

Se si cerca per esempio il 20mo termine, per cui $n=19$, si troverà dapprima;

$$\sigma_{19}=-20, \quad \sigma_{20}=2, \quad \sigma_{21}=23;$$

e quindi

$$p_{19}=-146.$$

57. Caso III. *L'equazione $\mu(x)=0$ ha diverse classi di radici multiple.* Supposto $\mu(x)=X_a^\alpha X_b^\beta \ldots X_l^\lambda$, ed inoltre:

$$p'_n=W_a+W_b+\ldots+W_l,$$

la quistione sarà risoluta dalle medesime formole del n° 51, salvo il cangiamento di s in σ. È poi manifesto che il numero delle costanti, che entrano nelle espressioni delle componenti W_a, W_b, ..., W_l, è sempre eguale ad m, grado di $\mu(x)$; e le equazioni che le determinano si otterranno dalla formola precedente dando ad n i valori successivi $0, 1, \ldots, m-1$, pe' quali si ha ancora $p'_0=0$, $p'_1=0$, ..., $p'_{m-2}=0$, $p'_{m-1}=\frac{1}{\mu_0}$.

OSSERVAZIONE

Il metodo di sviluppo delle funzioni fratte razionali risultante dalla seconda soluzione è suscettibile di un perfezionamento considerevole, nel caso in cui l'equazione $\mu(x)=0$ ammette radici uguali; vale a dire quando la funzione $\mu(x)$ è della forma $X_a^\alpha X_b^\beta \ldots X_l^\lambda$ il che rientra nel caso considerato a' numeri 51 e 57. Si è veduto che questo metodo riduce la quistione alla determinaziono simultanea delle componenti $W_a, W_b, \ldots, W_l$; ma si comprende che la risoluzione sarebbe grandemente agevolata quando queste componenti potessero determinarsi ad una ad una, cioè indipendentemente l' una dall' altra. Ora non solo è possibile di ottenere separatamente l'espressione di ogni componente come nella prima soluzione; ma sotto questo aspetto la ricerca diviene assai più semplice. Però, dipendendo questa novella risoluzione da principii di altra natura, ci limitiamo attualmente ad accennarla, riserbandoci di tornare in altra occasione su tale argomento.

NOTA I.

Sulla ricerca della funzione intera equivalente ad una funzione fratta razionale di una radice di un'equazione.

Le ricerche, delle quali ci siamo occupati, sono principalmente fondate sulla trasformazione di una funzione fratta razionale di una radice di una equazione in una funzione intera della stessa radice. Il metodo indicato a tale uopo nel n° 22 è semplice abbastanza per adottarsi in pratica; ma crediamo opportuno di esporne un altro molto più semplice, che non obbliga, come quello, ad introdurre coefficienti indeterminati, e che mena direttamente e prontamente alla trasformata.

Bisogna premettere che ogni funzione intera di una radice di un'equazione, di grado eguale o superiore a quello della equazione istessa, si può ridurre ad un'altra di grado inferiore. Sia a una radice dell'equazione di grado r:

$$F(x)=k_0x^r+k_1x^{r-1}+\ldots+k_{r-1}x+k_r=0$$

e s'indichi con $f(a)$ una funzione intera di a, di grado non inferiore ad r. Essendo $F(a)=0$, è chiaro che, mediante questa relazione si può esprimere il valore della potenza a^r, e di ogni altra potenza di grado più alto, in funzione delle potenze di gradi più piccoli di r; ed allora sostituendo le loro espressioni nella funzione $f(a)$, la medesima sarà ridotta ad un grado inferiore ad r, e generalmente al grado $r-1$. Ma questa riduzione, la quale a tal modo sarebbe lunga e fastidiosa, può essere operata di una maniera semplicissima, bastando perciò di dividere $f(a)$ per $F(a)$; ed il residuo, che in generale è funzione di a, di grado inferiore ad r, sarà la funzione ridotta equivalente ad $f(a)$. In effetti chiamando Q il quoziente, e $\theta(a)$ il residuo, si ha:

$$f(a)=QF(a)+\theta(a)\,;$$

ma $F(a)=0$; dunque risulta $f(a)=\theta(a)$.

È utile di avvertire che, se sia data una funzione $f(a)$ di grado $r-1$,

ed occorra di calcolare il sistema delle funzioni ridotte a grado inferiore a quello dell'equazione $F(a)=0$, equivalenti rispettivamento ai prodotti di $f(a)$ per le potenze successivo $a, a^2, a^3, \ldots, a^m$, questo sistema di m funzioni si può ottenere mediante una sola divisione, bastando perciò di dividere per $F(a)$ il solo prodotto di grado più elevato $f(a).a^m$, e continuare la divisione fino al residuo di grado $r-1$. Indicando le funzioni ridotte con $f_1(a), f_2(a), f_3(a), \ldots, f_m(a)$, è evidente che i successivi m residui della mentovata divisione coincidono rispettivamente con le seguenti espressioni:

$$f_1(a).a^{m-1};\ f_2(a).a^{m-2},\ f_3(a).a^{m-3}, \ldots, f_m(a).a^0\ ;$$

e quindi si vede che le funzioni richieste si ottengono tutte ad un tempo ne' detti residui, sgombrati ordinatamente de' fattori $a^{m-1}, a^{m-2}, \ldots, a, a^0$.

Ciò premesso, essendo sempre a radice dell'equazione $F(a)=0$, passeremo a cercare la funzione intera di a equivalente alla fraziono $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$, dove ora con $\varphi(a)$ e $\psi(a)$ intendiamo funzioni intere di gradi inferiori ad r, potendo sempre ridurvisi ove fussero di grado più alto. Posto:

$$u=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)},$$

liberando da fratti si ha l'equazione

$$\text{(I)} \qquad u\psi(a)=\varphi(a),$$

e la quistione si riduce a determinare il valore di u in funzione intera di a.

A tale effetto moltiplicheremo l'equaziono (I) per le potenze successive $a^0, a, a^2, \ldots, a^{r-1}$, ed avremo il sistema di r equazioni:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} u\psi(a) &= \varphi(a) \\ u\psi(a)a &= \varphi(a)a \\ u\psi(a)a^2 &= \varphi(a)a^2 \\ & \\ u\psi(a)a^{r-1} &= \varphi(a)a^{r-1}\ . \end{aligned}$$

Indi ridurremo i due membri di ciascuna a grado inferiore a quello di

$F(a)$; il che si ottiene con due sole divisioni, dividendo cioè per $F(a)$ i due prodotti $\psi(a)a^{r-1}$ e $\varphi(a)a^{r-1}$; ed in tal guisa, indicando per compendio le ridotte de'secondi membri con $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, ..., $\varphi_{r-1}(a)$, le equazioni superiori prendoranno la forma:

$$
\text{(III)} \qquad \begin{aligned}
&(\alpha\, a^{r-1} + \beta\, a^{r-2} + \ldots + \delta\, a + \varepsilon)u = \varphi(a)\\
&(\alpha_1 a^{r-1} + \beta_1 a^{r-2} + \ldots + \delta_1 a + \varepsilon_1)u = \varphi_1(a)\\
&(\alpha_2 a^{r-1} + \beta_2 a^{r-2} + \ldots + \delta_2 a + \varepsilon_2)u = \varphi_2(a)\\
&\qquad\ldots\\
&(\alpha_{r-1} a^{r-1} + \beta_{r-1} a^{r-2} + \ldots + \delta_{r-1} a + \varepsilon_{r-1})u = \varphi_{r-1}(a).
\end{aligned}
$$

Queste r equazioni, che diremo *equazioni ausiliari* per la determinazione della incognita u, conducono immediatamente ad esprimere il valore di u come una funzione intera di a; non dovendo che eliminarsi le $r-1$ potenze di a, che figurano ne' coefficienti di u, riguardate come incognite a primo grado. È chiaro che l'equazione risultante è lineare rispetto ad u; e mentre il coefficiente di questa incognita è indipendente da a, il termine indipendente da u è una funzione intera di a, la quale inoltre è di grado inferiore a quello di $F(a)$; e generalmente di grado $r-1$. In somma per la eliminazione delle dette potenze si ottiene un'equazione della forma:

$$Mu = h_0 a^{r-1} + h_1 a^{r-2} + \ldots + h_{r-1},$$

dove i coefficienti M, h_0, h_1, ..., h_{r-1} sono quantità date, che non dipendono da a; e dalla quale risulta senza più il valore di u espresso come una funzione intera di a, che in generale è di grado $r-1$.

Si potrebbe subito raggiungere l'espressione di questa funzione intera di a per mezzo di determinanti. In fatti messo per compendio:

$$M = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . & \delta & \varepsilon \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & . & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & . & \delta_{r-1} & \varepsilon_{r-1} \end{vmatrix},$$

segue dal sistema (III)

$$u=\frac{1}{M}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . & \delta & \varphi(a) \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & . & \delta_1 & \varphi_1(a) \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & . & \delta_{r-1} & \varphi_{r-1}(a) \end{vmatrix}.$$

Il valore che risulta per u dall'esposto procedimento, essendo una funzione intera di a, di grado inferiore a quello dell'equazione $F(a)=0$, è necessariamente unico e determinato. Osserveremo intanto che le riduzioni a doversi operare sulle equazioni (II) col mezzo della detta equazione potrebbero benissimo limitarsi ai soli coefficienti di u, lasciando come si trovano i secondi membri; e quindi, seguendo in tutto il resto lo stesso metodo di poc'anzi, si perverrebbe ancora ad esprimere il valore di u come una funzione intera di a. Questa nuova espressione di u, essendo di grado superiore ad $r-1$, è, nella forma, diversa dalla precedente; ma, ridotta al grado conveniente col mezzo della solita divisione per $F(a)$, dovrà coincidere con la stessa espressione di prima.

Se si tratta di trasformare la frazione $\frac{1}{\psi(a)}$, le equazioni ausiliari divengono semplicemente:

$$\begin{aligned}
&(\alpha a^{r-1} +\beta a^{r-2} +\ldots+\delta a +\varepsilon)u=1\\
&(\alpha_1 a^{r-1} +\beta_1 a^{r-2} +\ldots+\delta_1 a +\varepsilon_1)u=a\\
&(\alpha_2 a^{r-1} +\beta_2 a^{r-2} +\ldots+\delta_2 a +\varepsilon_2)u=a^2\\
&.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\\
&(\alpha_{r-1} a^{r-1}+\beta_{r-1} a^{r-2}+\ldots+\delta_{r-1} a+\varepsilon_{r-1})u=a^{r-1}
\end{aligned}$$

e quindi si avrebbe:

$$u=\frac{1}{M}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . & \delta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & . & \delta_1 & a \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & . & \delta_2 & a^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & . & \delta_{r-1} & a^{r-1} \end{vmatrix},$$

rappresentando M lo stesso determinante considerato più sopra.

Del rimanente bisogna osservare cho la trasformazione della frazione $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ può farsi immediatamente dipendere da quella $\frac{1}{\psi(a)}$, tutto riducendosi a moltiplicare per $\varphi(a)$ la trasformata intera equivalente all'ultima frazione.

Per applicare ad un esempio i procedimonti esposti cercheremo l'espressione intera di u equivalente alla frazione:

$$u=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{a^5+3a^4-5a^3+11a^2-2a-1}{a^4+a^3-2a^2+7a-2},$$

nella ipotesi che a debba verificare l'equazione di 3° grado:

$$F(a)=a^3-2a^2+3a-1=0.$$

Dividendo i due termini della frazione per $F(a)$, si hanno i due residui a^2-3a+1 ed a^2-a+1, e la frazione si riduce ad:

$$u=\frac{a^2-3a+1}{a^2-a+1},$$

donde, liberando da' fratti, si ha la prima delle equazioni ausiliari:

$$(a^2-a+1)u=a^2-3a+1.$$

Dovendo farsi sparire dal coefficiente di u le due potenze a^2, ed a, sono necessarie altre due equazioni, le quali si ottengono moltiplicando la prima per a^2, e poi riducendo i due membri con dividerli per $F(a)$. Le tre equazioni ausiliari saranno così le seguenti:

$$\begin{aligned}(a^2-a+1)u&=a^2-3a+1\\(a^2-2a+1)u&=-a^2-2a+1\\(-2a+1)u&=-4a^2+4a-1;\end{aligned}$$

e più non resta che ad eliminare da'coefficienti di u le due potenze a^2 ed a; il che può farsi in varii modi. Per esempio, eliminando a^2 tra i coefficienti di u delle due prime equazioni, si avrebbe:

$$au=2a^2-a;$$

ed ora eliminando a tra i coefficienti di u di questa equazione e della terza, verrà:

$$u=2a-1.$$

Merita di essere avvertito che spesso si può giungere al valore di u,

senza impiegare tutte le equazioni ausiliari. Così nell' esempio attuale potevano bastare le sole due prime; perchè, deducendosi da esse l'equazione $au=2a^2-a$, questa porge senza più il valore di u col dividere i due membri per a. Anzi la terza essa sola poteva essere sufficiente, dappoichè è riducibile alla forma:

$$(2a-1)u=(2a-1)^2,$$

e riproduce il già trovato valore di u, dividendola per $2a-1$.

Se la trasformazione della data frazione volesse farsi dipendere da quella di:

$$v=\frac{1}{\psi(a)}=\frac{1}{a^4+a^3-2a^2+7a-2}=\frac{1}{a^2-a+1},$$

le equazioni ausiliari per la determinazione di v sarebbero:

$$(a^2-\ a\ +1)v=1$$
$$(a^2-2a+1)v=a$$
$$(\quad -2a+1)v=a^2\ ;$$

quindi, eliminando da'coefficienti di v le potenze a^2 ed a, si troverebbe:

$$v=a^2-2a+2\ ;$$

e perciò moltiplicando per a^2-3a+1, verrebbe:

$$u=\frac{a^2-3a+1}{a^2-a+1}=(a^2-3a+1)(a^2-2a+2),$$

vale a dire, effettuando il prodotto:

$$u=a^4-5a^3+9a^2-8a+2\ .$$

Questa espressione di u non coincide con quella trovata più sopra; ma riducendola al debito grado col dividerla per $F(a)$, si ritorna ad $u=2a-1$.

Occorrendo di calcolare le funzioni intere equivalenti alle potenze successive di una frazione della forma $\frac{1}{\psi(a)}$, non è già necessario di trasformare direttamente le sue diverse potenze; ma basta trasformare soltanto la data frazione, e quindi elevare la trasformata alle indicate potenze.

Del rimanente nelle applicazioni è preferibile il seguente procedimento. Trovata la trasformata di $\frac{1}{\psi(a)}$, si eleverà a quadrato e si avrà quella di $\frac{1}{\psi(a)^2}$; indi si moltiplicherà questa trasformata per quella di $\frac{1}{\psi(a)}$, e si avrà la trasformata di $\frac{1}{\psi(a)^3}$; di nuovo, moltiplicando quest'ultima sempre per la trasformata di $\frac{1}{\psi(a)}$, si avrà quella di $\frac{1}{\psi(a)^4}$; e così continuando si otterranno le trasformate delle potenze di gradi più alti.

V'ha de'casi in cui riesce sgevole di porre in evidenza la legge ond'è composta la trasformata di qualunque potenza di una data frazione. Nel n° 36 è occorso di trasformare la frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$, nella ipotesi che a fosse radice dell'equazione:

$$\mu_0+2\mu_1 a+\mu_2 a^2=0 \, .$$

Si è ivi osservato che a questa equazione si può dar la forma:

$$\text{(IV)} \qquad (\mu_1+\mu_2 a)^2=\text{M} \, ,$$

ov'è messo per compendio:

$$\text{M}=\mu_1^2-\mu_0\mu_2 \, ;$$

quindi risulta:

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}=\frac{1}{\text{M}}(\mu_1+\mu_2 a) \, ,$$

e nel secondo membro si ha la trasformata intera della frazione proposta. È ora facilissima cosa di ottenere la trasformata di qualsivoglia potenza della stessa frazione. In effetti sia r un numero qualunque intero e positivo; si avrà dalla (IV):

$$(\mu_1+\mu_2 a)^{2r}=\text{M}^r \, ;$$

ed in seguito:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^{2r}}=\frac{1}{\text{M}^r} \, .$$

Inoltre, moltiplicando tra loro le equazioni (V) e (VI), membro a membro, risulta:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^{2r+1}}=\frac{1}{\text{M}^{r+1}}(\mu_1+\mu_2 a) \, ;$$

e quindi si vede che la trasformata intera di qualsivoglia potenza della

frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$ è data dall'una o dall'altra delle formole (VI) e (VII).

Vogliamo da ultimo far osservare che la trasformazione della frazione $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ potrebbe essere operata applicando il procedimento del massimo comun divisore ai polinomii $\psi(a)$ ed $F(a)$, come può vedersi nell'algebra del SERRET nel luogo citato in nota a piè di pagina al n° 22. Noi però non crediamo di dover insistere su questo metodo, essendo assai poco opportuno pel calcolo numerico.

NOTA II.

Sulle somme delle potenze simili delle radici delle equazioni.

Sarebbe quasi superfluo di arrestarci sulle somme delle potenze simili delle radici delle equazioni algebriche; nulla essendo più comune della loro teoria e delle loro proprietà; ma siccome si tratta di elementi essenziali nelle ricerche di cui ci siamo occupati, crediamo opportuno di richiamare qualcuna delle formole o de' metodi per ottenere i loro valori numerici. E dapprima, posta l'equazione di grado m:

$$F(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0 ,$$

nella quale il primo termine ha per coefficiente l'unità, rammenteremo che il valore di s_r può essere direttamente calcolato col mezzo della nota formola di WARING:

$$s_r=r\Sigma(-1)^\epsilon \Pi(\epsilon-1)\frac{a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}\ldots a_m^{\epsilon_m}}{\Pi\epsilon_1\Pi\epsilon_2\ldots\Pi\epsilon_m} ,$$

dove la somma figurata dal Σ deve estendersi ai sistemi di valori interi e positivi (incluso il zero), che verificano l'equazione indeterminata:

$$\epsilon_1+2\epsilon_2+3\epsilon_3+\ldots+m\epsilon_m=r ;$$

e dove è messo per compendio:

$$\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\ldots+\epsilon_m=\epsilon ,$$

Questa formola è inconcludente nel caso di $r=0$; ma si sa che in questa ipotesi si ha $s_0=m$.

Il valore di s_r può ancora farsi dipendere dalle somme di gradi inferiori ad r; a qual'effetto si hanno in pronto le formole ben conosciute di Newton:

$$s_1+a_1=0$$
$$s_2+a_1s_1+2a_2=0$$
$$s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\ldots+a_{m-1}s_1+ma_m=0$$

e per qualunque valore di r maggiore di m:

$$s_r+a_1s_{r-1}+a_2s_{r-2}+\ldots+a_{m-1}s_{r-m+1}+a_ms_{r-m}=0\ .$$

Si sa del resto che i valori di s_0, s_1, s_2, etc. sono i coefficienti dello sviluppo discendente della frazione:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{mx^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}}{x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}=\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\ldots+\frac{s_r}{x^{r+1}}+\ldots$$

sviluppo che può ottenersi mediante la divisione ordinaria. Questa formola intanto, mutandovi la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividendo i due membri per x, diviene:

$$\frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{xF\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{m+(m-1)a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}}{1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}=s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots+s_rx^r+\ldots$$

quindi si vede che i valori delle somme s_0, s_1, s_2, etc: sono i coefficienti dello sviluppo ascendente della frazione $\frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{xF\left(\frac{1}{x}\right)}$; e si ha per tal modo un metodo comodissimo per calcolare le dette somme col mezzo della divisione.

Ma per lo stesso oggetto troviamo indicato dal chiarissimo Professore Bellavitis un procedimento molto più semplice e rapido: procedimento immediatamente dichiarato dalle formole di Newton. Supponiamo che si tratti di calcolare le somme delle potenze simili delle radici dell'e-

quazione di 5° grado scritta nella parte superiore del quadro seguente:

$$x^5-3x^4+2x^3+5x^2-4x-2=0$$

$s_1=\ \ 3$	-3				
$s_2=\ \ 5$	-9	4			
$s_3=-\ 6$	-15	6	15		
$s_4=-\ 27$	18	10	15	-16	
$s_5=-\ 72$	81	-12	25	-12	-10
$s_6=-106$	216	-54	-30	-20	-6
$s_7=-\ 53$	318	-144	-135	24	-10
$s_8=\ \ 293$	159	-212	-360	108	12
etc:	etc:		etc:		etc:

Si comincerà dal moltiplicare ordinatamente i coefficienti dell'equazione, da quello del 2° termine, pe'numeri successivi 1, 2, 3, 4, etc:, ed i prodotti si scriveranno in altrettante righe orizzontali, ma per modo da procedere diagonalmente, scendendo da sinistra verso la dritta; e così nell'esempio si hanno i numeri $-3, 4, 15, -16, -10$, che sono gli ultimi a dritta delle prime cinque righe orizzontali. Fissati questi numeri, ecco come si trovano i valori di s_1, s_2, s_3, etc. Nella prima riga orizzontale, a sinistra del numero che già vi si trova scritto, si ripeterà lo stesso numero, ma col segno contrario, e si ha così $+3$, valore di s_1. Indi si moltiplicherà questo valore di s_1 pe' coefficienti dell'equazione, sempre a cominciare da quello del secondo termine, ed i prodotti si andranno situando per ordine nelle linee seguenti, immediatamente al di sotto dei primi numeri segnati nel quadro, in guisa da procedersi sempre diagonalmente da sinistra a dritta. Per tal modo la seconda riga è completata co' due numeri -9 e 4; la somma algebrica di questi due numeri, presa col segno contrario, darà $+5$ per valore di s_2. Operando con questo valore di s_2 come si è fatto con quelle di s_1, la terza riga si troverà completata co' tre numeri -15, 6, 15, e la loro somma algebrica, presa sempre col segno contrario, darà $+6$ per valore di s_3. Nella stessa maniera si passerà ai valori di s_4, s_5, etc.; ed è manifesto che in tal guisa si ha un metodo semplice e rapidissimo pel calcolo delle quantità s_r.